

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 30

November/Dezember

Heft 11/12

Zur Konvergenz bei genäherter konformer Abbildung¹⁾

Von G. Opitz in Dresden

Das Verfahren von Theodorsen²⁾ ist in seiner ursprünglichen Form auf die konforme Abbildung eines kreisnahen Gebietes auf den Einheitskreis zugeschnitten und nur auf gemischtem graphisch-analytischem Weg durchführbar, wenn die Rechenarbeit in erträglichen Grenzen bleiben soll. Dagegen läßt sich für die umgekehrte Abbildungsaufgabe (Einheitskreis \rightarrow kreisnahes Gebiet) der Prozeß auf rein rechnerischem Wege durchführen und so bei Bedarf eine beliebige Genauigkeitssteigerung erzielen. Für diesen Fall werden von einem neuen Gesichtspunkt aus die zugehörigen Formeln abgeleitet und Überlegungen über die Konvergenz des Verfahrens angestellt.

The method of Theodorsen²⁾ gives, in its genuine form, the conformal mapping of a nearly circular region onto the unit circle. It requires a combined graphical-numerical process, if the computation work shall remain endurable. It is possible, however, to perform the reciprocal mapping (unit circle \rightarrow nearly circular region) in a purely numerical way and so to achieve an arbitrary increase of accuracy if required. In this case, the necessary formulae are derived from a new point of view, and the convergence of the method is investigated.

La méthode de Théodorsen, dans sa forme originale, aboutit à la représentation conforme d'une domaine à peu près circulaire au cercle unitaire et se ne peut exécuter que par un procédé graphique-analytique combiné, à moins que la calculation n'exige pas trop d'effort. Là contre pour la représentation réciproque (cercle unitaire \rightarrow domaine à peu près circulaire) on peut déterminer une méthode purement analytique; ainsi on atteint, suivant le besoin, une précision quelconque. Pour ce cas on dérive les formules nécessaires d'un nouvel point de vue; la convergence de cette méthode est examinée.

Метод Теодорсена²⁾ применим в своей первоначальной форме для конформного отображения кругообразных областей на еденичный круг и может быть осуществлен только смешанным графически-аналитическим путем, если выкладки не должны быть слишком сложными. Напротив, обратная задача преобразования (единичный круг \rightarrow кругообразная область) может быть решена чисто аналитическим путем, что позволяет получить искомый результат с любой требуемой степенью точности. Для этого случая выводятся новым путем необходимые формулы и исследуется сходимость данного метода.

I. Das Verfahren

1. Aufstellung der Grundgleichungen

Für die Näherungsfunktion der Abbildung wird in Analogie zu Theodorsen der Ansatz

$$w = f^{(n)}(z) = ze^{h^{(n)}(z)} \quad \text{mit} \quad h^{(n)}(z) = \sum_{m=0}^n c_m z^m \dots \dots \dots (1.1)$$

gemacht; $f^{(n)}(z)$ soll das Innere des Einheitskreises der z -Ebene näherungsweise auf das Innere des kreisnahen Gebietes G der w -Ebene konform abbilden³⁾.

Dabei wird $h^{(n)}(z)$ dadurch bestimmt, daß durch $f^{(n)}(z)$ möglichst viele Punkte $z^* = e^{i\varphi}$ der Peripherie des Einheitskreises exakt auf den Rand R von G abgebildet werden sollen. Es zeigt sich, daß dies für $2n$ Randpunkte möglich ist, wenn man $2n$ Punkte z_k^* ($k = 1, 2, \dots, 2n$) beliebig fest auswählt und nur verlangt, daß ihre Bilder w_k^* auf R liegen sollen, ohne also deren Lage genauer festzulegen⁴⁾.

¹⁾ Unter Benutzung der Dissertation des Verfassers (eingereicht bei der Pädagogischen Fakultät der TH Dresden, Referent: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Korreferent: Prof. Dr. O.-H. Keller. Tag der mündlichen Prüfung: 27. 7. 1949).

²⁾ T. Theodorsen, NACA-Report Nr. 411, 1931, und T. Theodorsen und J. E. Garrick, NACA-Report Nr. 452, 1933.

³⁾ Es ist für die hier angestellten Überlegungen gleichgültig, ob es sich um die Abbildung des Inneren auf das Innere oder des Äußeren auf das Äußere handelt. Die Rechnung verläuft in analoger Weise, nur daß $h^{(n)}(z)$ im zweiten Falle ein Polynom in $1/z$ ist. Hier wird deshalb nur der erste Fall behandelt.

⁴⁾ Durch diese Vorschrift kann man sich ein klares Bild vom Verhalten der Näherungsfunktion machen, im Gegensatz zur bisher üblichen Ableitung, bei der die sich für die exakte Abbildung ergebende Potenzreihe bei einem bestimmten Glied abgebrochen wird.

Obwohl danach die Auswahl der z_k^* völlig frei ist, soll in der Folge nur der Fall betrachtet werden, daß die z_k^* äquidistant auf dem Kreisumfang verteilt sind, daß also für die Argumente von $z_k^* = e^{i\varphi_k}$ gilt

$$\varphi_k = k \cdot \Delta\varphi, \quad n \cdot \Delta\varphi = \pi, \quad \varphi_k - \varphi_l = \varphi_{k-l} \dots \dots \dots (1.2).$$

Das kreisnahe Gebiet G ist ein Sterngebiet, dessen Rand R in Polarkoordinaten durch die eindeutige stetige Funktion $\varrho(\psi)$ gegeben ist, so daß also die Randpunkte die Form $w^* = \varrho(\psi)e^{i\psi}$ haben. Die Ableitung $\varrho'(\psi)$ sei stückweise stetig; weitere Einschränkungen für $\varrho'(\psi)$ werden weiter unten ausführlich besprochen. Der üblichen eindeutigen Festlegung der Abbildung dient zunächst einmal die Form des Ansatzes (1.1), derzufolge der Nullpunkt der z -Ebene in den Nullpunkt der w -Ebene übergeht; außerdem werde vorgeschrieben, daß $f^{(n)'}(0) > 0$, also positiv reell ist. Mit $c_m = a_m - ib_m$ ist $f^{(n)'}(0) = e^{a_0 - ib_0}$, und die Vorschrift wird durch die Festsetzung $b_0 = 0$ erfüllt.

Gemäß der obigen Vorschrift sollen die Punkte z_k^* in Punkte w_k^* übergehen, die auf R liegen; es gilt also

$$\varrho(\psi_k) e^{i\psi_k} = e^{i\varphi_k} \cdot e^{h^{(n)}(z_k^*)} \dots \dots \dots (1.3).$$

Division durch $e^{i\varphi_k}$ und Logarithmieren liefert

$$\ln \varrho(\psi_k) + i(\psi_k - \varphi_k) = h^{(n)}(z_k^*).$$

Bezeichnet man den Real- bzw. Imaginärteil von $h^{(n)}(z_k^*)$ mit λ_k bzw. ε_k ⁵⁾, so ergibt sich nach Trennung in Real- und Imaginärteil

$$\ln \varrho(\psi_k) = \lambda_k \dots \dots \dots (1.4a),$$

$$\psi_k - \varphi_k = \varepsilon_k \dots \dots \dots (1.4b).$$

Um die Beziehung zwischen λ_k und ε_k abzuleiten, wird $h^{(n)}(z_k^*)$ hingeschrieben,

$$h^{(n)}(z_k^*) = \sum_{m=0}^n (a_m - ib_m) (\cos m\varphi_k + i \sin m\varphi_k),$$

und in Real- und Imaginärteil zerlegt,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= \sum_{m=0}^n (a_m \cos m\varphi_k + b_m \sin m\varphi_k) \\ \varepsilon_k &= \sum_{m=1}^{n-1} (a_m \sin m\varphi_k - b_m \cos m\varphi_k) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.5a),$$

$$(k = 1, 2, \dots, 2n) \dots \dots \dots (1.5b).$$

Dabei ist außer $b_0 = 0$ auch noch $b_n = 0$ gesetzt, da sich dieser Koeffizient nicht aus den benutzten Gleichungen ergibt und über ihn frei verfügt werden kann. Nun werden die durch harmonische Analyse aus (1.5a) gewonnenen Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2n} \sum_{l=1}^{2n} \lambda_l, & a_n &= \frac{1}{2n} \sum_{l=1}^{2n} (-1)^l \lambda_l, & b_0 &= b_n = 0, \\ a_m &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{2n} \lambda_l \cos m\varphi_l, & b_m &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{2n} \lambda_l \sin m\varphi_l \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.6)$$

($m = 1, 2, \dots, n-1$)

in (1.5b) eingesetzt,

$$\varepsilon_k = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{2n} \lambda_l \cdot \sum_{m=1}^{n-1} \sin m(\varphi_k - \varphi_l) = \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl} \lambda_l \dots \dots \dots (1.7).$$

Für die Koeffizienten β_{kl} ergibt sich unter Verwendung einer bekannten Summenformel⁷⁾ und bei Beachtung der Beziehungen und Bezeichnungen von (1.2)

$$\beta_{kl} = \frac{1 - (-1)^{k-l}}{2n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \varphi_{k-l}, \quad \beta_{kk} = 0 \dots \dots \dots (1.8).$$

⁵⁾ Der Index n wird hier fortgelassen, da jetzt der Grad des Polynoms $h^{(n)}(z)$ als konstant angesehen wird.

⁶⁾ ε_k hat eine anschauliche Bedeutung, es ist die „Winkeldrehung auf dem Rande“, der Winkel, um den der Vektor z_k^* gedreht werden muß, um in den Vektor w_k^* übergeführt zu werden.

⁷⁾ $\sum_{m=1}^r \sin m\alpha = \frac{\cos(\alpha/2) - \cos[(2r+1)\alpha/2]}{\sin(\alpha/2)}.$

Für gerade Werte von $k - l$ verschwinden also die β_{kl} , so daß in der Summe (1.7) nur n Summanden auftreten. Schreibt man (1.4a) mit (1.4b) in der Form

$$\lambda_k = \ln \varrho(\varphi_k + \varepsilon_k) \quad \dots \dots \dots (1.9a),$$

so ergibt sich mit (1.7)

$$\varepsilon_k = \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl} \lambda_l \quad \dots \dots \dots (1.9b)$$

eine Form, die für ein Iterationsverfahren geeignet ist, das zur Berechnung von $\{\lambda\}$ und $\{\varepsilon\}$ dienen kann⁸⁾. Mit einer Anfangsnäherung $\{\varepsilon\}_0$ beginnend, berechnet man aus (1.9a) $\{\lambda\}_1$, damit nach (1.9b) eine neue Näherung $\{\varepsilon\}_1$ usf., bis die Iteration innerhalb der gewünschten Genauigkeit zum Stillstand kommt. Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Iterationsverfahrens wird im II. Abschnitt abgeleitet. (1.6) liefert dann die Koeffizienten von $h^{(n)}(z)$ und damit die Näherungsfunktion.

2. Praktische Ergänzung und weitere Formeln.

Wie man sieht, kann man mit der Durchführung der Rechnung eine geübte, aber mathematisch wenig ausgebildete Hilfskraft betrauen; bei gegebener Umrißfunktion $\varrho(\psi)$ ist nur die Kenntnis des Formelpaares (1.9) nötig. In rationeller Weise läßt sich die Arbeit nur mit einer Rechenmaschine durchführen, die für (1.9b) die Aufsummierung von Produkten unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen gestattet; die Schreibarbeit und die damit verbundenen Fehlermöglichkeiten werden damit auf ein Minimum reduziert.

Da die Hälfte aller β_{kl} verschwindet, zerfällt das System (1.9b), für $k = 1$ bis $2n$ hingeschrieben, in zwei Teilsysteme, denn zur Berechnung der ε_k mit geradzahligem Index k werden nur die λ_l mit ungeradem Index l benutzt und umgekehrt. Man behandelt deshalb die beiden Teilsysteme getrennt und wendet am besten die Schiebestreifenmethode an. In jeder Gleichungszeile treten nämlich die gleichen Koeffizienten β_{kl} auf, da diese nur von der Differenz $k - l$ abhängen, nur jeweils zyklisch verschoben. Man schreibt die Folge der λ_l mit ungeradem Index von $l = 1$ bis $l = 2n - 1$ und mit geradem Index von $l = 2$ bis $l = 2n$ getrennt untereinander und fertigt sich einen β -Streifen von doppelter Länge an, auf dem die Werte β_{kl} von $d = k - l = 2n - 1$ bis $d = -(2n - 1)$ für alle ungeraden Werte von d (also nach fallenden Werten von d) aufgetragen werden. Zur Berechnung von ε_k legt man den β -Streifen so an die Spalte der λ_l heran, daß für nebeneinanderstehende λ_l und β_{kl} die Summe von l und d gleich dem gewünschten k ist. Dann wird nach (1.9b) die Produktsumme gebildet, ohne daß ein Zwischenergebnis festgehalten zu werden braucht. Da je zwei β_{kl} -Werte sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, können die beiden zugehörigen Produkte mit einer Einstellung berechnet werden. Steht für die Berechnung von λ_k nur eine Tafel der dekadischen Logarithmen zur Verfügung oder benötigt man ε_k für die weitere Rechnung ausschließlich in Gradmaß, so kann man die zugehörigen Umrechnungsfaktoren zu den β_{kl} schlagen.

Infolge der Linearität des Systems (1.9b) braucht man jeweils nur die Verbesserungen $\{\varepsilon\}_m - \{\varepsilon\}_{m-1}$ aus $\{\lambda\}_m - \{\lambda\}_{m-1}$ zu berechnen und zu $\{\varepsilon\}_{m-1}$ zu addieren, um $\{\varepsilon\}_m$ zu erhalten. So vermeidet man vielstellige Multiplikationen, muß allerdings die Rechnung von vornherein mit der vollen benötigten Stellenzahl durchführen und zur letzten Iteration wieder die Werte $\{\lambda\}_m$ direkt benutzen, um Abrundungsfehler auszugleichen und eine Rechenkontrolle zu haben. Als ausgezeichnete Kontrolle eines jeden Iterationsschritts erweist sich die Gleichung (3.2), in der U_k und V_k durch λ_k und ε_k zu ersetzen sind; diese Rechnung muß mit großer Stellenzahl durchgeführt werden, um die Fehler (absolut genommen) kleiner ε_k -Werte erkennen zu können.

Wendet man das Verfahren häufiger an, so kann man unter Verzicht auf die bequeme Schiebestreifenmethode durch Zerlegung in geraden und ungeraden Funktionsanteil den Gleichungen (1.9b) eine Gestalt geben, bei der die Zahl der Multiplikationen auf die Hälfte reduziert ist⁹⁾. Dazu ist die Aufstellung einer nur für eine bestimmte Punktzahl $2n$ geltenden Koeffizientenmatrix mit $n^2/4$ bzw. $(n^2 - 1)/4$ nicht verschwindenden Elementen notwendig.

Dazu bringt man zunächst (1.9b) auf die Form¹⁰⁾

$$\varepsilon_k = \sum_{l=1}^n \beta_{kl} \lambda_l + \sum_{l=0}^{n-1} \beta_{k, -l} \lambda_{2n-l} \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

⁸⁾ Durch die geschwungenen Klammern $\{\dots\}$ soll die Gesamtheit aller Werte des in den Klammern stehenden Buchstabens bezeichnet werden.

⁹⁾ H. Wittich, Jb. dtsh. Luftfahrtforsch. 1941, S. I 52—57.

¹⁰⁾ Bei diesen Rechnungen beachte man die für die β_{kl} und λ_k geltenden Rechenregeln:

I. $\lambda_k = \lambda_{k \pm 2n}$	} Periodizität,
II. $\beta_{kl} = \beta_{k \pm 2n, l} = \beta_{k, l \pm 2n}$	
III. $\beta_{lk} = -\beta_{kl}$	
IV. $\beta_{kl} = -\beta_{-k, -l}$	
Vertauschung der Indizes, Gleichzeitige Vertauschung der Vorzeichen der Indizes.	

oder

$$\varepsilon_k = \beta_{kn} \lambda_n + \beta_{k,2n} \lambda_{2n} + \sum_{l=1}^{n-1} (\beta_{kl} \lambda_l + \beta_{k,-l} \lambda_{2n-l}).$$

Unter Benutzung der Identität

$$\beta_{kl} \lambda_l + \beta_{k,-l} \lambda_{2n-l} = \frac{1}{2} (\beta_{kl} + \beta_{k,-l}) (\lambda_l + \lambda_{2n-l}) + \frac{1}{2} (\beta_{kl} - \beta_{k,-l}) (\lambda_l - \lambda_{2n-l})$$

kann man mit den Abkürzungen

$$s_l = \lambda_l + \lambda_{2n-l}, \quad d_l = \lambda_l - \lambda_{2n-l}, \quad (l = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.2a),$$

$$s_0 = \lambda_{2n}, \quad s_n = \lambda_n;$$

$$A_{kl} = \frac{1}{2} (\beta_{kl} + \beta_{k,-l}), \quad B_{kl} = \frac{1}{2} (\beta_{kl} - \beta_{k,-l}) \quad (l = 0, 1, \dots, n) \quad (2.2b)$$

die Summe in folgender Form schreiben:

$$\varepsilon_k = S_k + D_k = \sum_{l=0}^n A_{kl} s_l + \sum_{l=1}^{n-1} B_{kl} d_l, \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (2.3a).$$

Die übrigen ε_k -Werte findet man wegen

$$A_{2n-k,l} = -A_{kl}, \quad B_{2n-k,l} = B_{kl}$$

aus der Beziehung

$$\varepsilon_{2n-k} = -S_k + D_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.3b).$$

S_k und D_k müssen also getrennt berechnet werden. Wegen $B_{kl} = -A_{lk}$ braucht nur die Matrix der A_{kl} berechnet zu werden, die noch dazu wegen $A_{n-k,n-l} = -A_{kl}$ zum Zentrum antisymmetrisch ist, so daß die oben angegebene Zahl von Koeffizienten übrig bleibt. Zur Kontrolle kann man die Zeilenprobe

$$\frac{1}{2} (A_{k0} + A_{kn}) + \sum_{l=1}^{n-1} A_{kl} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

benutzen.

Weiter sollen noch einige Formeln mitgeteilt werden, die es gestatten, Real- und Imaginärteil von $h^{(n)}(z^*)$, $\lambda(\varphi)$ und $\varepsilon(\varphi)$, an beliebigen Punkten $\varphi = \varphi_{k,\delta} = \varphi_k + \delta$ ($|\delta| \leq \frac{1}{2} \Delta\varphi$) unmittelbar aus den λ_k zu berechnen, also ohne Kenntnis der Koeffizienten c_m . Die Methode ist die gleiche, die zur Darstellung der ε_k führte. In die Gleichungen für $\lambda(\varphi_{k,\delta})$ bzw. $\varepsilon(\varphi_{k,\delta})$ — in (1.5) ist nur φ_k durch $\varphi_{k,\delta}$ zu ersetzen — werden die Fourierkoeffizienten (1.6) eingesetzt. Nach Umformung der trigonometrischen Summen erhält man die folgenden Formeln:

$$\lambda(\varphi_{k,\delta}) = \sum_{l=1}^{2n} \alpha_{kl,\delta} \cdot \lambda_l \quad (2.4)$$

mit

$$\alpha_{kl,\delta} = \frac{(-1)^{k-l}}{2n} \cdot \sin n\delta \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \varphi_{k-l,\delta};$$

$$\varepsilon(\varphi_{k,\delta}) = \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl,\delta} \cdot \lambda_l \quad (2.5)$$

mit

$$\beta_{kl,\delta} = \frac{1}{2n} [1 - (-1)^{k-l} \cdot \cos n\delta] \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \varphi_{k-l,\delta}.$$

Durch die Beziehungen

$$\alpha_{kl,-\delta} = \alpha_{lk,\delta}, \quad \beta_{kl,-\delta} = -\beta_{lk,\delta}$$

wird die numerische Berechnung erleichtert, und die Formeln

$$\sum_{l=1}^{2n} \alpha_{kl,\delta} = 1, \quad \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl,\delta} = 0$$

können zur Kontrolle dienen.

Für die Ableitungen von $\lambda(\varphi)$ und $\varepsilon(\varphi)$ in den Punkten φ_k sollen schließlich auch noch Formeln angegeben werden, die die gesuchten Werte unmittelbar aus dem λ_k zu berechnen

gestatten. Die Rechnungen verlaufen wie der in der oben beschriebenen Weise¹¹⁾ und liefern:

$$\lambda'(\varphi_k) = \sum_{l=1}^{2n} \alpha'_{kl} \lambda_l \quad \dots \quad (2.6)$$

mit

$$\alpha'_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{für } k=l, \\ \frac{1}{2} (-1)^{k-l} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \varphi_{k-l} & \text{für } k \neq l; \end{cases}$$

$$\varepsilon'(\varphi_k) = \sum_{l=1}^{2n} \beta'_{kl} \lambda_l \quad \dots \quad (2.7)$$

mit

$$\beta'_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{für } k-l \text{ gerade, } k \neq l, \\ \frac{n}{2} & \text{für } k=l, \\ -\frac{1}{2n \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{k-l}} & \text{für } k-l \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Setzt man $\lambda(\varphi) = \text{const.}$, so ergibt sich die Kontrollformel

$$\sum_{l=1}^{2n} \beta'_{kl} = 0.$$

(2.6) und (2.7) kann man eine der Gleichung (2.3) analoge Form geben (siehe H. Wittich, a. a. O.). Auf die unter Umständen schlechte Annäherung der Ableitung einer in den Funktionswerten relativ gut angenäherten Funktion sei nur hingewiesen.

II. Die Konvergenz des Verfahrens

3. Ein Hilfssatz

Grundlage der Konvergenzbeweise ist folgender Hilfssatz: (3.A)

Besteht zwischen zwei Systemen von je $2n$ Zahlen $\{U\}$ und $\{V\}$ die Beziehung

$$V_k = \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl} U_l \quad \dots \quad (3.1),$$

wobei die β_{kl} durch (1.8) definiert sind, so gilt

$$\sum_{k=1}^{2n} V_k^2 = \sum_{k=1}^{2n} U_k^2 - \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{(u)} U_k \right)^2 + \left(\sum_{(g)} U_k \right)^2 \right] \quad \dots \quad (3.2).$$

Dabei bedeutet $\sum_{(u)}$ und $\sum_{(g)}$, daß über alle ungeraden bzw. geraden Werte von $k = 1, 2, \dots, 2n$ summiert werden soll. Zum Beweis stellt man durch harmonische Analyse das trigonometrische Polynom n -ter Ordnung auf, das an den Stellen φ_k die Werte U_k annimmt,

$$U_k = \sum_{m=0}^n (A_m \cos m\varphi_k + B_m \sin m\varphi_k), \quad B_0 = B_n = 0 \quad \dots \quad (3.3a).$$

Dann genügt $\{V\}$ folgender Beziehung, in der die gleichen Koeffizienten A_m, B_m wie in (3.3a) auftreten,

$$V_k = \sum_{m=1}^{n-1} (A_m \sin m\varphi_k - B_m \cos m\varphi_k) \quad \dots \quad (3.3b).$$

Man sieht das sofort, wenn man (3.3) mit (1.5) vergleicht:

$\{U\}$ und $\{V\}$ stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie $\{\lambda\}$ und $\{\varepsilon\}$. Da nun (1.9b) aus (1.5) folgt, folgt auch (3.1) aus (3.3), und wegen der Eindeutigkeit von (3.1) kann es kein anderes System $\{V\}$ geben als das nach (3.3b) darstellbare.

Für $\{U\}$ und $\{V\}$ und die Koeffizienten A_m, B_m ihrer trigonometrischen Polynome gelten nun die Gleichungen¹²⁾

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} U_k^2 &= 2n (A_0^2 + A_n^2) + n \cdot \sum_{m=1}^{n-1} (A_m^2 + B_m^2), \\ \sum_{k=1}^{2n} V_k^2 &= n \cdot \sum_{m=1}^{n-1} (B_m^2 + A_m^2). \end{aligned}$$

¹¹⁾ Die auftretenden trigonometrischen Summen werden als die Ableitungen anderer Summen geschrieben, die sich summieren lassen.

¹²⁾ Siehe z. B. Fr. A. Willers, Meth. der prakt. Anal., 2. Aufl., Berlin 1950, S. 222.

Es ist also zunächst

$$\sum_{k=1}^{2n} V_k^2 = \sum_{k=1}^{2n} U_k^2 - 2n(A_0^2 + A_n^2) \quad \dots \quad (3.4).$$

Dem letzten Term gibt man eine andere Gestalt,

$$2(A_0^2 + A_n^2) = (A_0 - A_n)^2 + (A_0 + A_n)^2 \quad \dots \quad (3.5);$$

nun ist entsprechend (1.6)

$$A_0 - A_n = \frac{1}{n} \sum_{(u)} U_k; \quad A_0 + A_n = \frac{1}{n} \sum_{(g)} U_k.$$

Setzt man diese Werte in (3.5) ein, so erhält man aus (3.4) die behauptete Gleichung (3.2), aus der sofort die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{2n} V_k^2 \leq \sum_{k=1}^{2n} U_k^2 \quad \dots \quad (3.6)$$

folgt, so daß der Hilfssatz kurz in folgender Form formuliert werden soll:

$$\text{Aus (3.1) folgt (3.6).} \quad (3.B)$$

4. Die Konvergenz des Iterationsverfahrens

Als hinreichend für die Konvergenz des Iterationsverfahrens gemäß (1.9) erweist sich die Bedingung¹³⁾

$$M = \text{Max} \left| \frac{\varrho'(\psi)}{\varrho(\psi)} \right| < 1 \quad \dots \quad (4.1).$$

Anschaulich gesprochen bedeutet dies, daß die Normale des Randes R mit dem Fahrstrahl vom Nullpunkt nur Winkel bilden darf, die kleiner als 45° sind.

Für den Beweis wird zunächst (1.9b) für einen beliebigen m -ten Iterationsschritt hingeschrieben¹⁴⁾ und (1.9a) eingesetzt,

$$\varepsilon_{k,m} = \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl} \lambda_{l,m} = \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl} \cdot \ln \varrho(\varphi + \varepsilon_{l,m-1}) \quad \dots \quad (4.2).$$

Jetzt denkt man sich die gleiche Gleichung für den nächsten Iterationsschritt darüber geschrieben (m wird durch $m+1$ ersetzt) und bildet die Differenz

$$\varepsilon_{k,m+1} - \varepsilon_{k,m} = \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl} [\ln \varrho(\varphi_l + \varepsilon_{l,m}) - \ln \varrho(\varphi_l + \varepsilon_{l,m-1})] \quad \dots \quad (4.3).$$

Wegen der Stetigkeit von $\varrho(\psi)$ kann man weiter schreiben

$$\varepsilon_{k,m+1} - \varepsilon_{k,m} = \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl} D_{l,m} (\varepsilon_{l,m} - \varepsilon_{l,m-1}) \quad \dots \quad (4.4),$$

wobei $D_{l,m}$ eine Zahl ist, die zwischen dem größten und kleinsten Wert liegt, den $\varrho'(\psi)/\varrho(\psi)$ im Intervall $(\varphi_l + \varepsilon_{l,m}, \varphi_l + \varepsilon_{l,m-1})$ annimmt. Nach (3.B) ist nun

$$\sum_{k=1}^{2n} (\varepsilon_{k,m+1} - \varepsilon_{k,m})^2 \leq \sum_{k=1}^{2n} D_{k,m}^2 (\varepsilon_{k,m} - \varepsilon_{k,m-1})^2,$$

oder, wenn man $D_{k,m}^2$ durch den wegen (4.1) sicher nicht kleineren Wert M^2 ersetzt,

$$\sum_{k=1}^{2n} (\varepsilon_{k,m+1} - \varepsilon_{k,m})^2 \leq M^2 \sum_{k=1}^{2n} (\varepsilon_{k,m} - \varepsilon_{k,m-1})^2 \quad \dots \quad (4.5).$$

Bezeichnet man den $2n$ -dimensionalen Vektor $\{\varepsilon\}_m$ vorübergehend mit e_m , so bedeutet (4.5) in der Notation der Vektorrechnung

$$|e_{m+1} - e_m| \leq M \cdot |e_m - e_{m-1}| \quad \dots \quad (4.6).$$

Durch mehrfache Anwendung dieser Gleichung ergibt sich

$$|e_{m+1} - e_m| \leq M^m \cdot |e_1 - e_0|$$

¹³⁾ Siehe die gleiche Bedingung bei G. Opitz, Arch. d. Math. 2 (1949/50), S. 110–116. Dort muß der Satz „Wegen . . . $s(\varphi)$ “ unter Gl. (28) lauten: „Danach konvergiert $\{\varepsilon_n(\varphi)\}$ bis auf eine Menge vom Maße Null gegen $s(\varphi)$.“

¹⁴⁾ Die zweiten, durch Komma getrennten Indizes bei λ_k und ε_k geben die Nummer der Iteration an.

und daraus schließlich nach einigen Umformungen

$$|e_{m+p} - e_m| \leq \frac{M^m}{1 - M} \cdot |e_1 - e_0| \dots \dots \dots (4.7)$$

für beliebiges ganzzahliges $p > 0$. Da die rechte Seite wegen (4.1) beliebig klein gemacht werden kann, indem man m genügend groß wählt, bedeutet dies aber gerade, daß e_m gegen einen Grenzvektor e konvergiert,

$$e = \lim_{m \rightarrow \infty} e_m, \quad \text{also} \quad \varepsilon_k = \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_{k,m} \dots \dots \dots (4.8).$$

Daß dieses Grenzsystem $\{\varepsilon\}$ tatsächlich ein Lösungssystem darstellt, sieht man, wenn man in (4.2) m gegen Unendlich konvergieren läßt. Rechts kann man wegen der Stetigkeit von $\varrho(\psi)$ Funktions- und Grenzwertbildung vertauschen und gelangt so mit (4.8) zu (1.9). Damit ist die Konvergenz des Iterationsverfahrens und die Existenz einer Lösung nachgewiesen, und zwar unabhängig von der Anfangsnäherung $\{\varepsilon\}_0$.

Die Eindeutigkeit der Lösung wird leicht indirekt bewiesen. Gäbe es zwei verschiedene Lösungssysteme $\{\varepsilon\}^{(I)}$ und $\{\varepsilon\}^{(II)}$, so müßte für beide (1.9) gelten. Durch Subtraktion erhält man

$$\varepsilon_k^{(I)} - \varepsilon_k^{(II)} = \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl} [\ln \varrho(\varphi_l + \varepsilon_k^{(I)}) - \ln \varrho(\varphi_l + \varepsilon_l^{(II)})] \dots \dots \dots (4.9),$$

und behandelt man diese Gleichung wie (4.3), so ergibt sich entsprechend (4.5)

$$\sum_{k=1}^{2n} (\varepsilon_k^{(I)} - \varepsilon_k^{(II)})^2 \leq M^2 \sum_{k=1}^{2n} (\varepsilon_k^{(I)} - \varepsilon_k^{(II)})^2,$$

also, da die Quadratsumme wegen der vorausgesetzten Verschiedenheit beider Systeme nicht verschwindet, $M \geq 1$ im Gegensatz zu (4.1). Es gibt demnach nur eine Lösung.

5. Einige Eigenschaften der exakten Abbildungsfunktion

Setzt man in Theodorsens Ansatz für die Abbildungsfunktion

$$w = f(z) = z \cdot e^{h(z)}, \quad h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m \dots \dots \dots (5.1)$$

$h(z^*) = \bar{\lambda}(\varphi) + i \cdot \bar{\varepsilon}(\varphi)$ (es ist $z^* = e^{i\varphi}$), so gilt für die Winkeldrehung auf dem Rande die Integralgleichung (s. Theodorsen, a. a. O.)

$$\bar{\varepsilon}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\lambda}(\varphi') \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi'}{2} d\varphi' \dots \dots \dots (5.2a)$$

mit

$$\bar{\lambda}(\varphi) = \ln \varrho(\varphi + \bar{\varepsilon}(\varphi)) \dots \dots \dots (5.2b).$$

Unter Berücksichtigung der Periodizität von $\bar{\lambda}(\varphi)$ läßt sich das uneigentliche Integral (5.2a), von dem der Cauchy'sche Hauptwert zu nehmen ist, umformen in

$$\bar{\varepsilon}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \Theta(\varphi, \sigma) d\sigma \dots \dots \dots (5.3),$$

wobei gesetzt wurde

$$\Theta(\varphi, \sigma) = [\bar{\lambda}(\varphi - \sigma) - \bar{\lambda}(\varphi + \sigma)] \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \sigma \dots \dots \dots (5.4).$$

$\Theta(\varphi, \sigma)$ ist für $\sigma = 0$ nicht definiert; durch geeignete Definition läßt sich jedoch diese Unstetigkeit beheben. Dazu müssen noch einige Zwischenüberlegungen angestellt werden.

Setzt man in (5.1) für z die Randpunkte $z^* = e^{i\varphi}$ ein, so ergibt sich nach Differentiation nach φ

$$\bar{\lambda}'(\varphi) + i(1 + \bar{\varepsilon}'(\varphi)) = iz^* \cdot \frac{f'(z^*)}{f(z^*)} \dots \dots \dots (5.5).$$

Wegen (5.2b) ist nun mit $\varphi + \bar{\varepsilon}(\varphi) = \psi$

$$\bar{\lambda}'(\varphi) = \frac{\varrho'(\psi)}{\varrho(\psi)} \cdot (1 + \bar{\varepsilon}'(\varphi)) \dots \dots \dots (5.6).$$

Dies wird in (5.5) eingesetzt, und man erhält

$$\bar{\lambda}'(\varphi) = \frac{iz^* \cdot \varrho'(\psi)}{\varrho'(\psi) + i\varrho(\psi)} \cdot \frac{f'(z^*)}{f(z^*)} \dots \dots \dots (5.7).$$

In allen Randpunkten, in deren Bildpunkten der Rand R glatt verläuft, also $\varrho'(\psi)$ stetig ist, ist dies auch $f'(z^*)$ und damit $\lambda'(\varphi)$. Besondere Untersuchung erfordern nur die Unstetigkeitsstellen von $\varrho'(\psi)$, denen Ecken im Rand R entsprechen. Ist $w_0^* = f(z_0^*)$ ein Eckpunkt, so läßt sich $f(z)$ in der Form

$$w - w_0^* = (z - z_0^*)^\alpha \cdot P(z - z_0^*) \dots \dots \dots (5.8)$$

darstellen; $P(z)$ ist eine Potenzreihe in z , deren Absolutglied P_0 nicht verschwindet, $\alpha \cdot \pi$ ist der Winkel, vom Innern von G aus gerechnet, den der Rand im Punkt w_0^* bildet. Damit wird (5.7) zu

$$\bar{\lambda}'(\varphi) = \frac{iz^* \cdot \varrho'(\psi)}{\varrho'(\psi) + i\varrho(\psi)} \cdot \frac{\alpha(z^* - z_0^*)^{\alpha-1} \cdot P(z^* - z_0^*) + (z^* - z_0^*)^\alpha \cdot P'(z^* - z_0^*)}{w_0^* + (z^* - z_0^*)^\alpha \cdot P(z^* - z_0^*)}.$$

Man sieht, daß $\bar{\lambda}'(\varphi)$ für $z^* \rightarrow z_0^*$ über alle Grenzen wächst, wenn $\alpha < 1$ ist, d. h. wenn G ausspringende Ecken besitzt. Ausspringende Ecken sollen deshalb in Zukunft ausgeschlossen werden. Für $\alpha > 1$, also einspringende Ecken, geht dagegen $\bar{\lambda}'(\varphi)$ für $z^* \rightarrow z_0^*$ stetig gegen Null, da die Unstetigkeit von $\varrho'(\psi)$ in diesem Fall unwirksam wird. Man hat so das Ergebnis:

$\bar{\lambda}'(\varphi)$ ist im gesamten Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ stetig. $\dots \dots \dots (5.A)$

Da $\bar{\varepsilon}'(\varphi)$ gleichfalls in einem abgeschlossenen Intervall stetig ist, ist es im gesamten Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ beschränkt.

Daraus folgt weiter sofort:

$\bar{\varepsilon}(\varphi)$ genügt einer Lipschitz-Bedingung $\dots \dots \dots (5.B)$

Nach Bereitstellung der nötigen Sätze wird die Überlegung im Anschluß an (5.4) fortgesetzt. Wegen (5.A) kann man (5.4) dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung zufolge schreiben

$$\Theta(\varphi, \sigma) = -2\bar{\lambda}'(\varphi + \tau\sigma) \cdot \sigma \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \sigma, \quad |\tau| \leq 1 \dots \dots \dots (5.9).$$

Ist nun C ein beliebiger (nicht notwendig analytischer) Weg in dem Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 < \sigma \leq \pi$, der in dem Randpunkt $P_0(\varphi', 0)$ endet, so wird, wenn man den Punkt $P(\varphi, \sigma)$ längs C nach P_0 rücken läßt, wegen (5.A) $\Theta(\varphi, \sigma)$ stets dem gleichen Grenzwert zustreben,

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \Theta(\varphi, \sigma) = \Theta(\varphi', 0) = -4\bar{\lambda}'(\varphi') \dots \dots \dots (5.10).$$

Durch diese Definition der Randwerte $\Theta(\varphi, 0)$ ist $\Theta(\varphi, \sigma)$ im ganzen Gebiet $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \sigma \leq \pi$ stetig, und daraus folgt noch schärfer

$\Theta(\varphi, \sigma)$ ist im abgeschlossenen Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \sigma \leq \pi$ gleichmäßig stetig $(5.C)$.

Für den folgenden Beweis soll weiter der Begriff des Stetigkeits- oder Schwankungsmoduls¹⁵⁾ eingeführt werden. Betrachtet man $\Theta(\varphi, \sigma)$ bei festgehaltenem φ als Funktion von σ , so ist der Stetigkeitsmodul $\omega(\varphi, \delta)$ definiert durch

$$\omega(\varphi, \delta) = \operatorname{Max} |\Theta(\varphi, \sigma_1) - \Theta(\varphi, \sigma_2)| \text{ für alle } |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \delta \dots \dots \dots (5.11),$$

die im Intervall $0 \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq \pi$ liegen. Wegen (5.C) ist $\omega(\varphi, \delta)$ eine stetige, mit wachsendem δ nicht abnehmende Funktion von δ , für die gilt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\varphi, \delta) = 0 \dots \dots \dots (5.12)$$

gleichmäßig für alle φ .

$\omega(\varphi, \delta)$ konvergiert mit δ gleichmäßig für alle φ gegen Null $\dots \dots \dots (5.D)$.

6. Die Konvergenz der Näherungsfunktionen

Um die exakte Abbildungsfunktion mit der Näherung vergleichen zu können, wird jene auch an den diskreten Punkten φ_k betrachtet. Dazu teilt man den Bereich $0 \leq \sigma \leq \pi$ in n Inter-

¹⁵⁾ C. de la Vallée-Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris 1919, S. 7.

valle mit den Teilpunkten $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ und nähert das Integral (5.3) nach der Tangententrapezregel¹⁶⁾ an; das Restglied wird mit Hilfe des Stetigkeitsmoduls abgeschätzt. Unter Berücksichtigung der Periodizität erhält man mit $\bar{\lambda}(\varphi_k) = \bar{\lambda}_k$, $\bar{\varepsilon}(\varphi_k) = \bar{\varepsilon}_k$

$$\bar{\varepsilon}_k = \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl} \bar{\lambda}_l + \frac{1}{2} \gamma_k \omega\left(\varphi_k, \frac{\pi}{n}\right), \quad |\gamma_k| \leq 1 \dots \dots \dots (6.1).$$

Da jetzt der Grad der Näherung veränderlich ist, wird er zu λ_k und ε_k als oberer Index zugefügt; damit wird (1.9a)

$$\lambda_k^{(n)} = \ln \varrho(\varphi_k + \varepsilon_k^{(n)}).$$

Nun wird die rechte Seite als Funktion von $\varepsilon_k^{(n)}$ an der Stelle $\bar{\varepsilon}_k$ entwickelt,

$$\lambda_k^{(n)} = \ln \varrho(\varphi_k + \bar{\varepsilon}_k) + F_k^{(n)} \cdot (\varepsilon_k^{(n)} - \bar{\varepsilon}_k) = \bar{\lambda}_k + F_k^{(n)} \cdot (\varepsilon_k^{(n)} - \bar{\varepsilon}_k);$$

$F_k^{(n)}$ ist ein Wert von $\varrho'(\psi)/\varrho(\psi)$ im Intervall $(\varphi_k + \varepsilon_k^{(n)}, \varphi_k + \bar{\varepsilon}_k)$. Obige Gleichung wird nun in (1.9b) eingesetzt,

$$\varepsilon_k^{(n)} = \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl} \bar{\lambda}_l + \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl} F_k^{(n)} \cdot (\varepsilon_l^{(n)} - \bar{\varepsilon}_l),$$

und davon wird (6.1) abgezogen,

$$\varepsilon_k^{(n)} - \bar{\varepsilon}_k = \sum_{l=1}^{2n} \beta_{kl} F_l^{(n)} \cdot (\varepsilon_l^{(n)} - \bar{\varepsilon}_l) - \frac{1}{2} \gamma_k \cdot \omega\left(\varphi_k, \frac{\pi}{n}\right).$$

Schreibt man das letzte Glied auf die linke Seite und wendet (3.B) an,

$$\sum_{k=1}^{2n} [(\varepsilon_k^{(n)} - \bar{\varepsilon}_k) + \frac{1}{2} \gamma_k \cdot \omega\left(\varphi_k, \frac{\pi}{n}\right)]^2 \leq \sum_{k=1}^{2n} [F_k^{(n)} \cdot (\varepsilon_k^{(n)} - \bar{\varepsilon}_k)]^2,$$

so kann man rechts $F_k^{(n)2}$ wegen (4.1) durch M^2 ersetzen und links nach Ausmultiplizieren den einen quadratischen Term fortlassen, ohne die Ungleichung zu verletzen. Man erhält so

$$(1 - M^2) \sum_{k=1}^{2n} (\varepsilon_k^{(n)} - \bar{\varepsilon}_k)^2 \leq - \sum_{k=1}^{2n} \gamma_k \cdot \omega\left(\varphi_k, \frac{\pi}{n}\right) \cdot (\varepsilon_k^{(n)} - \bar{\varepsilon}_k) \dots \dots \dots (6.2).$$

Da die kleinere Seite sicher positiv ist, kann die ganze Ungleichung quadriert werden. Dann wird auf die rechte Seite die S c h w a r z s c h e Ungleichung angewendet,

$$(1 - M^2)^2 \sum_{k=1}^{2n} (\varepsilon_k^{(n)} - \bar{\varepsilon}_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{2n} \gamma_k^2 \cdot \omega^2\left(\varphi_k, \frac{\pi}{n}\right).$$

Nun ersetzt man rechts γ_k^2 durch 1 und $\omega(\varphi_k, \pi/n)$ durch den größten Wert $\omega_0(\pi/n)$, den $\omega(\varphi, \pi/n)$ im Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ annimmt; die Existenz von ω_0 ist durch (5.C) gesichert.

$$\frac{(1 - M^2)^2}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (\varepsilon_k^{(n)} - \bar{\varepsilon}_k)^2 \leq \omega_0^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \dots \dots \dots (6.3).$$

Hier läßt man nun n gegen Unendlich konvergieren und erhält mit (5.D)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} (\varepsilon_k^{(n)} - \bar{\varepsilon}_k)^2 = 0 \dots \dots \dots (6.4).$$

Die mittlere quadratische Abweichung von $\varepsilon^{(n)}(\varphi)$ von $\bar{\varepsilon}(\varphi)$, genommen an den Punkten φ_k , konvergiert also gegen Null. Das Bemerkenswerte an diesem Grenzübergang ist, daß sowohl die Funktion wie auch die Punktzahl sich mit n ändert. Zum Nachweis der mittleren Konvergenz von $\varepsilon^{(n)}(\varphi)$ gegen $\bar{\varepsilon}(\varphi)$ ist deshalb die Einführung einer Folge von Hilfsfunktionen $\bar{\varepsilon}^{(n)}(\varphi)$ notwendig. $\bar{\varepsilon}^{(n)}(\varphi)$ ist das trigonometrische Polynom n -ten Grades

$$\bar{\varepsilon}^{(n)}(\varphi) = \sum_{m=0}^n (\alpha'_{mn} \sin m\varphi - \beta'_{mn} \cos m\varphi), \quad \alpha'_{0n} = \alpha'_{nn} = 0 \dots \dots \dots (6.5),$$

das mit $\bar{\varepsilon}(\varphi)$ in den $2n$ Punkten φ_k übereinstimmt,

$$\bar{\varepsilon}_k = \bar{\varepsilon}(\varphi_k) = \bar{\varepsilon}^{(n)}(\varphi_k) = \bar{\varepsilon}_k^{(n)}.$$

¹⁶⁾ Siehe z. B. Fr. A. Willers, Meth. der prakt. Anal., 2. Aufl., Berlin 1950, S. 136.

Damit nimmt (6.4) die Gestalt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} (\varepsilon_k^{(n)} - \bar{\varepsilon}_k^{(n)})^2 = 0 \quad \dots \quad (6.6)$$

an. Aus (1.5b) und (6.5) folgt, daß auch die Differenz $\varepsilon^{(n)}(\varphi) - \bar{\varepsilon}^{(n)}(\varphi)$ vom n -ten Grade ist,

$$\varepsilon^{(n)}(\varphi) - \bar{\varepsilon}^{(n)}(\varphi) = \sum_{m=0}^n (\alpha_{mn} \sin m\varphi - \beta_{mn} \cos m\varphi), \quad \alpha_{0n} = \alpha_{nn} = 0 \quad \dots \quad (6.7).$$

Da $\varepsilon^{(n)}(\varphi)$ das konstante Glied und die n -te Harmonische nicht enthält, ist $\beta_{0n} = \beta'_{cn}$ und $\beta_{nn} = \beta'_{nn}$. Für (6.7) gilt nun (s. Willers, a. a. O.¹²⁾).

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} (\varepsilon_k^{(n)} - \bar{\varepsilon}_k^{(n)})^2 = 2(\beta_{0n}^2 + \beta_{nn}^2) + \sum_{m=1}^{n-1} (\alpha_{mn}^2 + \beta_{mn}^2) \quad \dots \quad (6.8)$$

und andererseits¹⁷⁾

$$J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varepsilon^{(n)}(\varphi) - \bar{\varepsilon}^{(n)}(\varphi)]^2 d\varphi = 2\beta_{0n}^2 + \beta_{nn}^2 + \sum_{m=1}^{n-1} (\alpha_{mn}^2 + \beta_{mn}^2) \quad \dots \quad (6.9),$$

so daß man die in (6.6) auftretende Summe durch ein Integral ersetzen kann,

$$S_n = J_n + \beta_{nn}^2 \quad \dots \quad (6.10).$$

Durch Aufspaltung wird aus J_n

$$\pi J_n = \int_0^{2\pi} \{[\varepsilon^{(n)}(\varphi) - \bar{\varepsilon}(\varphi)] - [\bar{\varepsilon}^{(n)}(\varphi) - \bar{\varepsilon}(\varphi)]\}^2 d\varphi$$

und durch Umformung mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung

$$\pi J_n \geq \left\{ \sqrt{\int_0^{2\pi} [\varepsilon^{(n)}(\varphi) - \bar{\varepsilon}(\varphi)]^2 d\varphi} - \sqrt{\int_0^{2\pi} [\bar{\varepsilon}^{(n)}(\varphi) - \bar{\varepsilon}(\varphi)]^2 d\varphi} \right\}^2 \quad \dots \quad (6.11).$$

Mit (6.10) wird daraus

$$\sqrt{\pi(S_n - \beta_{nn}^2)} \geq \left| \sqrt{\int_0^{2\pi} [\varepsilon^{(n)}(\varphi) - \bar{\varepsilon}(\varphi)]^2 d\varphi} - \sqrt{\int_0^{2\pi} [\bar{\varepsilon}^{(n)}(\varphi) - \bar{\varepsilon}(\varphi)]^2 d\varphi} \right|.$$

Für die einzelnen Teile dieser Ungleichung gilt mit wachsendem n :

- a) S_n geht nach (6.6) gegen Null,
- b) $\beta_{nn} = \beta'_{nn}$ geht wegen der Stetigkeit von $\bar{\varepsilon}(\varphi)$ gegen Null¹⁸⁾.
- c) Da $\bar{\varepsilon}^{(n)}(\varphi)$ wegen (5.B) gleichmäßig gegen $\bar{\varepsilon}(\varphi)$ konvergiert¹⁹⁾, geht der zweite Term der rechten Seite gegen Null.

Daraus folgt, daß auch der erste Term der rechten Seite gegen Null geht,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} [\varepsilon^{(n)}(\varphi) - \bar{\varepsilon}(\varphi)]^2 d\varphi = 0 \quad \dots \quad (6.12),$$

d. h. die Folge der $\varepsilon^{(n)}(\varphi)$ konvergiert im Mittel gegen $\bar{\varepsilon}(\varphi)$ (6.A).

Damit ist der Beweis abgeschlossen. Es seien nochmals kurz die Bedingungen angegeben, unter denen er geführt wurde: Das Gebiet G ist ein Sternbereich, dessen Rand mit Ausnahme einspringender Ecken eine sich stetig drehende Tangente besitzt. Außerdem ist G durch (4.1) auf „kreisnahe“ Gebiete begrenzt. Die Existenz der Krümmung wird an keiner Stelle vorausgesetzt.

¹⁷⁾ Siehe z. B. Fr. A. Willers, Meth. der prakt. Anal., 2. Aufl., Berlin 1950, S. 212.

¹⁸⁾ W. Quade, Deutsche Mathematik 5 (1941), S. 487.

¹⁹⁾ W. Quade, Deutsche Mathematik 5 (1941), S. 504.

Dreidimensionale Probleme der Charakteristikentheorie partieller Differentialgleichungen

Von R. Sauer in München

Die Arbeit handelt von 3-dimensionalen Problemen der Charakteristikentheorie partieller Differentialgleichungen. Im ersten Teil werden Probleme erörtert, die sich infolge gewisser Symmetrien auf 2- oder 1-dimensionale Aufgaben entweder streng oder in „halblinearer Näherung“ zurückführen lassen. Im zweiten Teil wird eine Gitterkonstruktion entwickelt, welche dem bekannten Massauschen Verfahren für 2-dimensionale Aufgaben analog ist.

The author investigates 3-dimensional problems in the theory of characteristics of partial differential equations. In the first part, problems are treated that because of certain symmetries can be reduced to 1- or 2-dimensional problems, either exactly or by a „semilinear approximation“. In the second part, a construction of lattices is developed that is analogous to the well-known Massau method for 2-dimensional problems.

Dans la communication présente, l'auteur étudie des problèmes à 3 dimensions de la théorie des caractéristiques des équations aux dérivées partielles. La première partie comprend des problèmes qui, en conséquence de certaines symétries, se réduisent à des problèmes à 1 ou 2 dimensions, soit rigoureusement soit dans une „approximation semi-linéaire“. Dans la seconde partie, il est développé une construction de grilles analogue à la méthode de Massau bien connue pour les problèmes à 2 dimensions.

В данной работе исследуется трех мерная задача теории характеристик дифференциальных уравнений в частных производных. В первой части рассматриваются задачи, которые вследствие некоторых свойств симметрии могут быть точно или в „полулинейном“ приближении сведены к задачам одного или двух измерений. Во второй части разрабатывается метод решеток, аналогичный известному методу массо для плоских задач.

1. Einleitung

Zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen partieller Differentialgleichungen, wie sie z. B. in der Gasdynamik und in der Strömungslehre seichter Gewässer auftreten, ist bei 2-dimensionalen Problemen das Massausche Charakteristikenverfahren ein sehr brauchbares Hilfsmittel und wurde in zahlreichen Arbeiten [1] [2] [3] für derartige Aufgaben verwandt.

Neuerdings ist das Bedürfnis nach geeigneten Charakteristikenverfahren für 3-dimensionale Probleme immer mehr in den Vordergrund getreten. Hierbei ergeben sich 2 Möglichkeiten, nämlich 1. die Reduktion 3-dimensionaler Aufgaben auf 2- oder 1-dimensionale und 2. die Erweiterung des Massauschen Verfahrens auf 3 Dimensionen unter Vermeidung eines praktisch nicht mehr tragbaren Arbeitsaufwandes. Beide Möglichkeiten sind mehrfach versucht worden.

Die Reduktion auf geringere Dimensionszahl durch Drehsymmetrie oder Kegelsymmetrie führt bei Lösungen dreidimensionaler Probleme, die nicht allzu stark von dreh- oder kegelsymmetrischen Lösungen abweichen (z. B. Strömung um Drehkörper bei kleinem Anstellwinkel), zu „halblinearen“ Näherungsverfahren. Bei diesen wird die reduzierte Aufgabe entweder mit dem üblichen 2-dimensionalen Charakteristikenverfahren behandelt oder sogar noch weiter auf eine 1-dimensionale Aufgabe gewöhnlicher Differentialgleichungen reduziert [4] [5] [6]. Ziffer 2 gibt einen systematischen Überblick über diese Reduktionsverfahren.

Die Erweiterung des 2-dimensionalen Massauschen Charakteristikenverfahrens zu einer 3-dimensionalen Gitterkonstruktion bildet den Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit und wird in Ziffer 3 ausführlich behandelt. Für spezielle Fälle wurden solche Gitterkonstruktionen schon mehrfach entwickelt, erstmals wohl von C. Ferrari [7] und neuerdings insbesondere in einem Buch von A. Ferri [8] über stationäre Überschallströmungen. Es erscheint jedoch nützlich diese Gitterkonstruktionen unter allgemeinem Gesichtspunkt systematisch darzustellen und zu ihrer praktischen Anwendung eine Gebrauchsanweisung anzugeben, wie dies in ähnlicher Weise für 2-dimensionale Charakteristikenverfahren bereits früher von K. Oswatitsch [9] und vom Verfasser dieser Arbeit [10] geschehen ist.

2. Reduktion auf 2- und 1-dimensionale Probleme

Wir erläutern die Reduktion 3-dimensionaler Probleme auf 2- und 1-dimensionale am Beispiel der Überschallströmung idealer Gase ($\kappa = c_p/c_v = \text{const} = \text{Verhältnis der spezifischen Wärmen bei festem Druck bzw. Volumen}$). Sie genügt den 4 quasilinearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\left. \begin{aligned} (u^2 - a^2)u_x + uvu_y + uwu_z + vuv_x + (v^2 - a^2)v_y + vv_v_z + wuv_x + wvv_y \\ + (w^2 - a^2)w_z = 0, \\ v(u_y - v_x) + w(u_z - w_x) - \frac{a^2}{\kappa(\kappa - 1)}s_\sigma = 0, \\ w(v_z - w_y) + u(v_x - u_y) - \frac{a^2}{\kappa(\kappa - 1)}s_j = 0, \\ us_\sigma + vs_j + ws_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1).$$

für die 4 Funktionen u, v, w (Komponenten des Geschwindigkeitsvektors) und s (Entropie) der 3 cartesischen Koordinaten x, y, z . Die Schallgeschwindigkeit a ist durch

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2} (u^2 + v^2 + w^2), \quad a_0 = \text{const} \quad \dots \quad (2),$$

als Funktion des Geschwindigkeitsbetrags gegeben. Die Untersuchung beschränkt sich auf Bereiche mit Überschallgeschwindigkeit d. h. mit $u^2 + v^2 + w^2 > a^2$.

2.1. Drehsymmetrische und kegelsymmetrische Lösungen

Zur Ermittlung drehsymmetrischer Lösungen (z -Achse = Symmetrieachse) führt man Zylinderkoordinaten ω, r, z (Bild 1) ein und erhält dann aus den Gln. (1) ein System von Differentialgleichungen mit nur 2 unabhängigen Veränderlichen z, r , also ein 2-dimensionales Problem.

Da die Charakteristiken dieses Problems im Überschallbereich reell sind, läßt sich das Massausche Charakteristikenverfahren verwenden [1].

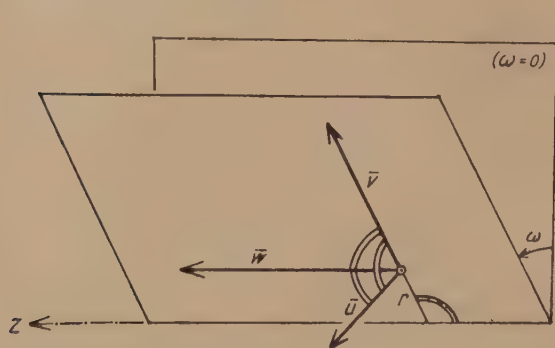


Bild 1. Zylinderkoordinaten ω, r, z und Geschwindigkeitskomponenten $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$

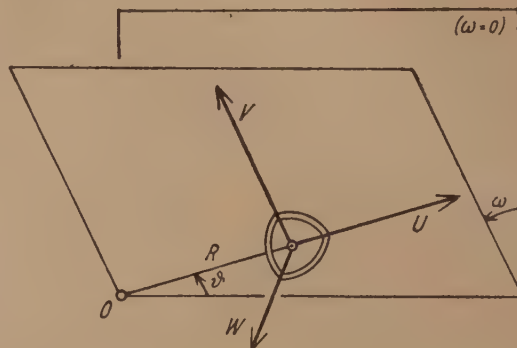


Bild 2. Polarkoordinaten R, θ, ω und Geschwindigkeitskomponenten U, V, W

Zur Ermittlung kegelsymmetrischer Lösungen ($u, v, w, s = \text{const}$ auf jeder Halbgeraden durch den Symmetriepunkt $x = y = z = 0$) führt man Polarkoordinaten R, θ, ω (Bild 2) ein und erhält dann aus den Gln. (1) ein System von Differentialgleichungen mit nur 2 unabhängigen Veränderlichen θ, ω , also wieder ein 2-dimensionales Problem.

Die Charakteristiken dieses Problems sind jedoch nur in dem Bereich reell, in dem die zu den Geraden durch den Symmetriepunkt senkrechte Geschwindigkeitskomponente größer als die Schallgeschwindigkeit ist (vgl. Ziffer 3, 4). Man kann daher das Massausche Charakteristikenverfahren i. a. nicht verwenden und ist, falls lineare Näherungsverfahren [14] [15] [16] nicht ausreichen, auf eine 3-dimensionale Gitterkonstruktion angewiesen.

Bei Strömungen, die gleichzeitig dreh- und kegelsymmetrisch sind, bleibt nach Einführung von Polarkoordinaten nur die eine unabhängige Veränderliche θ und man erhält an Stelle der partiellen Differentialgleichungen gewöhnliche Differentialgleichungen, also ein 1-dimensionales Problem. Auf diese Weise haben Busemann [11], Bourquardt [12] und Taylor-Maccoll [13] die Überschallströmung um den Drehkegel mit Anstellwinkel Null und anliegender kegelförmiger Kopfwelle berechnet.

2.2. Halblinare Verfahren für Nachbarlösungen drehsymmetrischer und kegelsymmetrischer Lösungen

Bei Strömungen, welche von einer drehsymmetrischen Strömung mit der z -Achse als Drehachse nur wenig abweichen und zur Ebene $\omega = 0$ symmetrisch sind (Beispiel: Überschallströmung um einen Drehkörper bei kleinem Anstellwinkel ε), machen wir in einem Zylinderkoordinatensystem (Bild 1) für die Geschwindigkeitskomponenten den Ansatz [4]

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \varepsilon \bar{u}_1(z, r) \sin \omega, \\ \bar{v} &= \bar{v}_0(z, r) + \varepsilon \bar{v}_1(z, r) \cos \omega, \\ \bar{w} &= \bar{w}_0(z, r) + \varepsilon \bar{w}_1(z, r) \cos \omega, \\ \bar{s} &= \bar{s}_0(z, r) + \varepsilon \bar{s}_1(z, r) \cos \omega \end{aligned} \right\} \dots \quad (3).$$

Die Funktionen $\bar{v}_0(z, r), \bar{w}_0(z, r), \bar{s}_0(z, r)$ (— zusammen mit $\bar{u}_0(z, r) = 0$ —) bestimmen eine drehsymmetrische Strömung und ergeben sich nach Ziffer 2,1 mit Hilfe des 2-dimensionalen Charakteristikenverfahrens.

Der dreh-symmetrischen Strömung wird in dem Ansatz (3), in dem die Veränderliche ω separiert ist, eine durch die Funktionen

$$\bar{u}_1(z, r), \quad \bar{v}_1(z, r), \quad \bar{w}_1(z, r), \quad \bar{s}_1(z, r)$$

gekennzeichnete Zusatzströmung überlagert. Wir berücksichtigen ε nur linear und erhalten dann für die gesuchten Funktionen $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1, \bar{s}_1$ aus den Gln. (1) ein System linearer Differentialgleichungen mit den 2 unabhängigen Veränderlichen z, r , welches die Charakteristiken der dreh-symmetrischen Lösung als Charakteristiken hat und wieder mit dem 2-dimensionalen Charakteristikenverfahren behandelt werden kann.

Der spezielle Ansatz (3) mit der Abspaltung der Veränderlichen ω wird dadurch gerechtfertigt, daß sich mit ihm die Randbedingungen des Problems erfüllen lassen. Wir bezeichnen das Verfahren als „halblinear“, da die dreh-symmetrische Strömung streng, die überlagerte Strömung jedoch mit Beschränkung auf die in ε linearen Glieder aus linearen Differentialgleichungen berechnet wird.

Als Beispiel einer Reduktion auf 1 Dimension d. h. auf gewöhnliche Differentialgleichungen besprechen wir die Überschallströmungen, die von einer zugleich dreh-symmetrischen und konischen Strömung nur wenig abweichen und wieder zur Ebene $\omega = 0$ symmetrisch sind (Überschallströmung in der Umgebung der Spitze 0 eines spindelartigen Drehkörpers unter kleinem Anstellwinkel, Bild 3).

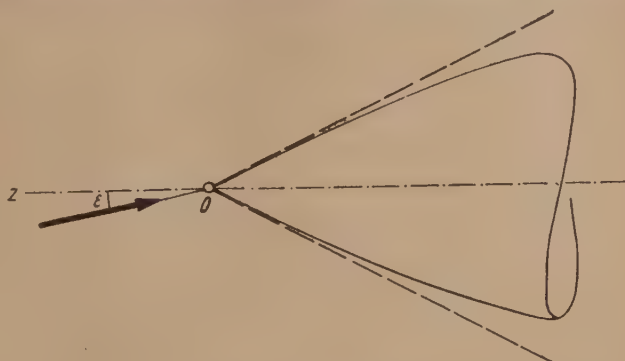


Bild 3. Überschallströmung um einen nahezu konischen Drehkörper unter kleinem Anstellwinkel ε

Wir machen jetzt in einem räumlichen Polarkoordinatensystem (Bild 2) für die Geschwindigkeitskomponenten den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0(\vartheta) + \varepsilon U_1(\vartheta) \cos \omega + R U_2(\vartheta), \\ V &= V_0(\vartheta) + \varepsilon V_1(\vartheta) \cos \omega + R V_2(\vartheta), \\ W &= \varepsilon W_1(\vartheta) \sin \omega, \\ s &= s_0 + \varepsilon s_1 \cos \omega + R s_2(\vartheta), \quad s_0 = \text{const}, \quad s_1 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (4).$$

Durch diesen Ansatz sind die 3 unabhängigen Veränderlichen R, ϑ, ω separiert und man hat lediglich Funktionen der einen Veränderlichen ϑ zu ermitteln. $U_0(\vartheta), V_0(\vartheta)$ und $s_0 = \text{const}$ liefern eine dreh-symmetrische und kegelsymmetrische Strömung (Strömung um den nicht angestellten Drehkegel), $U_1(\vartheta), V_1(\vartheta), W_1(\vartheta)$ und $s_1 = \text{const}$ eine durch den Anstellwinkel ε hervorgerufene Zusatzströmung und $U_2(\vartheta), V_2(\vartheta), s_2(\vartheta)$ eine durch die Krümmung des Drehkörpermeridians an der Spitze 0 bedingte zweite Zusatzströmung.

Wir linearisieren sowohl hinsichtlich ε als auch hinsichtlich R und erhalten $\left(' = \frac{d}{d\vartheta} \right)$ aus den Differentialgleichungen (1) nach elementaren Rechnungen

a) für die dreh-symmetrische Grundströmung:

$$\left. \begin{aligned} (a^2 - U_0'^2) (U_0 + U_0'') + a^2 (U_0 + U_0' \text{ctg } \vartheta) &= 0, \quad V_0 = U_0' \\ \text{mit } a^2 &= a_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2} (U_0^2 + U_0'^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots (5a);$$

b) für die erste Zusatzströmung:

$$\left. \begin{aligned} (a^2 - U_0'^2) U_1'' + P(\vartheta) U_1' + Q(\vartheta) U_1 + \frac{a^2}{\sin \vartheta} W_1 &= 0, \quad V_1 = U_1', \\ U_0' W_1' + (U_0 + U_0' \text{ctg } \vartheta) W_1 + \frac{1}{\sin \vartheta} (U_0 U_1 + U_0' U_1') + \frac{a^2}{\kappa(\kappa - 1) \sin \vartheta} s_1 &= 0 \end{aligned} \right\} (5b)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} P(\vartheta) &= a^2 \text{ctg } \vartheta + \frac{U_0 + U_0' \text{ctg } \vartheta}{a^2 - U_0'^2} (2a^2 U_0' + (\kappa - 1) U_0'^3), \\ Q(\vartheta) &= 2a^2 - U_0'^2 + (\kappa - 1) U_0 U_0'^2 \cdot \frac{U_0 + U_0' \text{ctg } \vartheta}{a^2 - U_0'^2}; \end{aligned}$$

c) für die zweite Zusatzströmung:

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= s_0 \cdot \exp \left[- \int \frac{U_0}{V_0} d\vartheta \right], & U'_2 - 2 V_2 &= \frac{1}{\kappa(\kappa-1)} \frac{a^2}{V_0} s_2, \\ (a^2 - V_0^2) V'_2 + L(\vartheta) U_2 + M(\vartheta) V_2 &= \frac{1}{\kappa(\kappa-1)} U_0 a^2 s_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (5c)$$

mit den Abkürzungen

$$L(\vartheta) = 3a^2 - (U_0^2 + V_0^2) + (\kappa-1)(U_0 + V_0 \operatorname{ctg} \vartheta) \frac{U_0 V_0^2}{a^2 - V_0^2},$$

$$M(\vartheta) = -2 U_0 V_0 + (U_0 + V_0 \operatorname{ctg} \vartheta) \frac{V_0(2a^2 + (\kappa-1) V_0^2)}{a^2 - V_0^2} + a^2 \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (5a) für $U_0(\vartheta)$ liefert die bekannte Busemannsche drehsymmetrische Kegelströmung [11] [12] [13]. Wenn diese ermittelt ist, liefern die beiden linearen Differentialgleichungen zweiter und erster Ordnung (5b) für $U_1(\vartheta)$ und $W_1(\vartheta)$ die erste Zusatzströmung [4] [5] [6]. Gleichzeitig ergibt sich die zweite Zusatzströmung aus den Gln. (5c); die erste dieser Gleichungen liefert $s_2(\vartheta)$, die beiden übrigen Gleichungen sind lineare Differentialgleichungen erster Ordnung für $U_2(\vartheta)$ und $V_2(\vartheta)$.

Die bei den Integrationen auftretenden Integrationskonstanten sowie die im Ansatz (4) vorkommenden Konstanten lassen sich eindeutig festlegen durch die Randbedingungen an dem von der Körperspitze ausgehenden Verdichtungsstoß. Für die Durchführung im einzelnen sei auf die Originalarbeit [4] verwiesen, in der allerdings die Untersuchung der Kürze halber auf isentropische Strömungen ($s_1 = 0$) und auf kegelförmige Drehkörper beschränkt war.

3. Gitterkonstruktion für 3-dimensionale Probleme

Wenn die für eine Reduktion erforderlichen Symmetrieeigenschaften nicht vorhanden sind, also ein im eigentlichen Sinne 3-dimensionales Problem vorliegt, stehen für geringere, in vielen praktischen Fällen ausreichende Genauigkeitsansprüche lineare Näherungsverfahren [15] [16] zur Verfügung. Bei höheren Genauigkeitsansprüchen ist man jedoch auf die 3-dimensionale Charakteristikentheorie angewiesen. Wir werden im folgenden zuerst die benötigten theoretischen Grundbegriffe dieser Theorie erläutern und dann die durch Verallgemeinerung der 2-dimensionalen Verfahren [9] [10] sich ergebende räumliche Gitterkonstruktion behandeln.

3.1. Theoretische Grundbegriffe

Wir erläutern die Theorie an dem System zweier quasilinearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\left. \begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + b_{13}v_3 &= g_1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + b_{23}v_3 &= g_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

für die 2 gesuchten Funktionen u, v der 3 unabhängigen Veränderlichen x, y, z . Bei u und v bedeuten die Indizes 1, 2, 3 Ableitungen nach x, y, z . Die Koeffizienten a_{ik} , b_{ik} und g_i ($i = 1, 2$; $k = 1, 2, 3$) sind Funktionen von x, y, z und von u, v .

Vorgegeben sei eine Fläche $z = f(x, y)$ und eine Werteverteilung u, v auf ihr. Hiermit sind auch die „inneren Ableitungen“ (Bild 4)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z}$$

der Funktionen u, v , d.h. die Ableitungen der Funktionswerte $u(x, y, f(x, y))$ und $v(x, y, f(x, y))$ auf den Schnittkurven l, m der Ebenen $y = \text{const}$ bzw. $x = \text{const}$ vorgegeben.

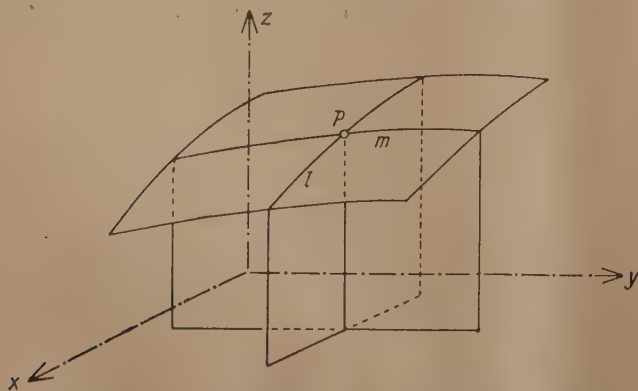


Bild 4. Fläche mit Schnittkurven l ($y = \text{const}$) und m ($x = \text{const}$)

$p = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ bestimmen den Normalenvektor $(p, q, -1)$ der vorgegebenen Fläche.

Durch passende Wahl des Koordinatensystems läßt sich stets erreichen, daß eine vorgegebene

Fläche keine zur z -Achse parallele Tangentenebene besitzt und daher durch $z=f(x, y)$ dargestellt werden kann. Der Ansatz $z=f(x, y)$ bedeutet also keine wesentliche Einschränkung.

Wir versuchen nun zu den vorgegebenen inneren Ableitungen $\frac{\delta u}{\delta x}, \frac{\delta u}{\delta y}, \frac{\delta v}{\delta x}, \frac{\delta v}{\delta y}$ aus den Differentialgleichungen (6) die aus der vorgegebenen Fläche herausführenden Ableitungen $u_3 = \frac{\partial u}{\partial z}, v_3 = \frac{\partial v}{\partial z}$ zu berechnen. Zu diesem Zweck schreiben wir die Differentialgleichungen (6) in folgender Form

$$\left. \begin{aligned} (a_{11}p + a_{12}q - a_{13})u_3 + (b_{11}p + b_{12}q - b_{13})v_3 &= a_{11}\frac{\delta u}{\delta x} + a_{12}\frac{\delta u}{\delta y} + b_{11}\frac{\delta v}{\delta x} + b_{12}\frac{\delta v}{\delta y} - g_1, \\ (a_{21}p + a_{22}q - a_{23})u_3 + (b_{21}p + b_{22}q - b_{23})v_3 &= a_{21}\frac{\delta u}{\delta x} + a_{22}\frac{\delta u}{\delta y} + b_{21}\frac{\delta v}{\delta x} + b_{22}\frac{\delta v}{\delta y} - g_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

und erhalten dabei folgende Alternative:

a) Wenn die Ausgangsfläche $z=f(x, y)$ und die auf ihr vorgegebenen Werte u, v der Richtungsbedingung genügen

$$R \equiv \begin{vmatrix} a_{11}p + a_{12}q - a_{13} & b_{11}p + b_{12}q - b_{13} \\ a_{21}p + a_{22}q - a_{23} & b_{21}p + b_{22}q - b_{23} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \dots \dots (8),$$

haben die für u_3, v_3 linearen Gleichungen (7) nur dann Lösungen, wenn auch die Verträglichkeitsbedingung

$$V \equiv \begin{vmatrix} a_{11}p + a_{12}q - a_{13} & a_{11}\frac{\delta u}{\delta x} + a_{12}\frac{\delta u}{\delta y} + b_{11}\frac{\delta v}{\delta x} + b_{12}\frac{\delta v}{\delta y} - g_1 \\ a_{21}p + a_{22}q - a_{23} & a_{21}\frac{\delta u}{\delta x} + a_{22}\frac{\delta u}{\delta y} + b_{21}\frac{\delta v}{\delta x} + b_{22}\frac{\delta v}{\delta y} - g_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \dots (9)$$

erfüllt wird; die gesuchten Ableitungen sind dann aber nicht eindeutig festgelegt, sondern es gibt unendlich viele Lösungen u_3, v_3 . Die erste Spalte der Determinante V kann infolge von Gleichung (8) auch mit den b_{ik} statt mit den a_{ik} gebildet werden.

b) Wenn die Ausgangsfläche $z=f(x, y)$ und die auf ihr vorgegebenen Werte u, v der Richtungsbedingung nicht genügen ($R \neq 0$), lassen sich die gesuchten Ableitungen u_3, v_3 aus den Gleichungen (7) eindeutig berechnen. Die Ausgangspunkte u, v bleiben in diesem Falle bis auf die Ungleichung $R \neq 0$ willkürlich und sind keiner Verträglichkeitsbedingung unterworfen.

Wir bezeichnen eine Fläche bezüglich der auf ihr vorgegebenen Werte u, v als charakteristisch, wenn die Bedingungen $R=V=0$ erfüllt sind, und für $R \neq 0$ als nicht charakteristisch. Die Richtungsbedingung (8) ordnet jedem Punkt $P(x, y, z)$ mit vorgegebenen Werten u, v einen Kegel 2. Klasse (charakteristischer Kegel) mit den Normalenvektoren $(p, q, -1)$ zu. Wir bezeichnen die Differentialgleichungen (6) für das gegebene Wertesystem x, y, z, u, v als hyperbolisch, wenn der charakteristische Kegel reell ist und nicht entartet. Alle nachfolgenden Betrachtungen beziehen sich auf hyperbolische Bereiche. Außerdem bezeichnen wir ein Linienelement als raumartig, wenn es außerhalb des charakteristischen Kegels liegt, wenn also 2 Tangentenebenen des charakteristischen Kegels (charakteristische Flächenelemente) durch das Linienelement gelegt werden können (Bild 5).

Die charakteristischen Flächen sind Hüllflächen charakteristischer Kegel, d. h. sie werden in jedem Punkt von einem charakteristischen Kegel berührt. Wenn die Koeffizienten a_{ik}, b_{ik} Funktionen von x, y, z und auch von u, v sind (quasilineare Differentialgleichungen (6)), ändern sich die charakteristischen Kegel und Flächen bei Änderung der vorgegebenen Funktionswerte u, v . Wenn dagegen die Koeffizienten a_{ik}, b_{ik} Funktionen nur von x, y, z , nicht aber von u, v sind (lineare Differentialgleichungen (6)), liegen die charakteristischen Kegel und Flächen von vornherein, d. h. unabhängig von den vorgegebenen Funktionswerten u, v fest.

Die Charakteristikentheorie [17] [18] führt zu folgenden allgemeinen Sätzen für die in einem Raumbereich (R) existierenden Lösungen u, v der Differentialgleichungen (6):

1. Bei vorgegebener Lösung u, v gehen durch jede Kurve mit raumartigen Linienelementen 2 charakteristische Flächen. Wenn sich die Kurve auf einen Punkt P zusammenzieht, entsteht eine charakteristische Fläche, welche in P den charakteristischen Kegel längs aller Erzeugenden berührt und wegen ihrer kegelartigen Gestalt als charakteristisches Konoid bezeichnet wird (Bild 6).

2. Eine Fläche (F) mit der Randkurve r sei bezüglich vorgegebener Funktionswerte u, v auf (F) nicht charakteristisch; alle Linienelemente von (F) seien raumartig. Wenn dann eine Lösung der Differentialgleichungen (6) mit den auf (F) vorgegebenen Anfangswerten existiert, ist sie durch diese in einem Bestimmtheitsbereich (B) eindeutig festgelegt. Der Bereich (B) wird auf jeder der beiden Seiten von (F) von der „inneren“ der 2 durch die Randkurve r gehenden charakteristischen Flächen begrenzt (— in Bild 7 ausgezogen —).

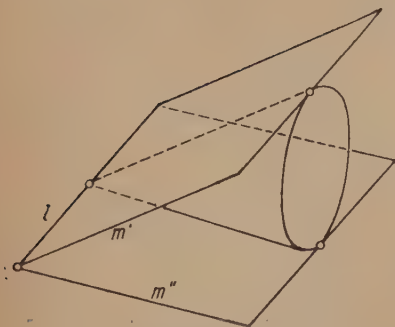
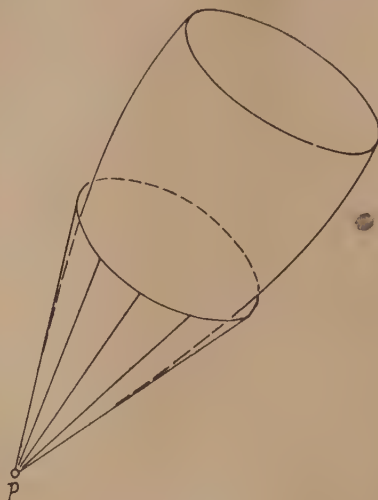
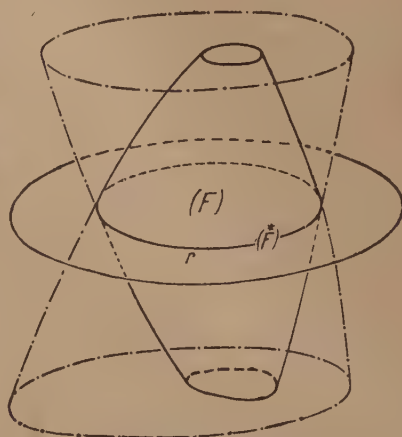
Bild 5. Raumartiges Linienelement l 

Bild 6. Charakteristisches Konoid

Bild 7. Ausgangsfläche F mit Bestimmtheits- und Einflußbereich

3. Wir betrachten verschiedene Lösungen und ihre Anfangswerte auf einer Fläche (F^*), welche die Fläche (F) als Teil enthält. Wenn die Anfangswerte auf (F^*) nur außerhalb von (F) geändert werden, ändert sich die Lösung nur außerhalb des zu (F) gehörigen Bestimmtheitsbereichs. Wenn die Anfangswerte auf (F^*) nur innerhalb von (F) geändert werden, ändert sich die Lösung nur innerhalb des Einflußbereichs, der von den „äußeren“ durch r gehenden charakteristischen Flächen (— in Bild 7 strichpunktiert —) begrenzt wird. Wenn sich (F) auf einen Punkt P zusammenzieht, entartet der Bestimmtheitsbereich in den Punkt P und der Einflußbereich in das von P ausgehende charakteristische Konoid.

3.2. Gitterkonstruktion bei Systemen von 2 quasilinearen Differentialgleichungen erster Ordnung

Nach Satz 2 am Schluß von Ziff. 3,1 ist eine Lösung durch ihre Anfangswerte u, v auf einer Ausgangsfläche (F) mit lauter raumartigen Linienelementen in dem Bestimmtheitsbereich (B) eindeutig festgelegt. Wir wollen diese Lösung jetzt näherungsweise durch ein Differenzenverfahren mittels einer Gitterkonstruktion bestimmen:

Das Gitter besteht aus einer Folge von Ebenen

$$y = 0, \quad y = 2\varepsilon, \quad y = 4\varepsilon, \quad \dots \quad y = 2n\varepsilon$$

und aus einer Folge von Ebenen $x = \text{const}$ sowie aus den charakteristischen Flächen der einen Schar, welche von den Schnittkurven $l(y = \text{const})$ der Ausgangsfläche ausgehen (Bild 8).

Die Gitterpunkte P_{ik} auf der Ausgangsfläche und ihre Funktionswerte $u(P_{ik}), v(P_{ik})$ sind vorgegeben.

In jedem Punkt P_{ik} ergeben sich aus der Richtungsgleichung (8) 2 Richtungen q'_{ik}, q''_{ik} nach Einsetzen der durch die Schnittkurven vorgegebenen Richtungen $p = \frac{\partial f}{\partial x}$. An Stelle der strengen Werte p (Tangenten) benützen wir dabei die Näherungswerte (Sehnen)

$$p_{12} = \frac{z(P_{22}) - z(P_{12})}{x(P_{22}) - x(P_{12})} \text{ usf.}$$

Die Schnittpunkte \bar{P}_{ik} der durch die Richtungen q'_{ik} und $q''_{i,k+1}$ bestimmten Geraden m'_{ik} und $m''_{i,k+1}$ nehmen wir als Näherungen für Punkte der charakteristischen Flächen des Gitters.

Näherungen der Funktionswerte $u(\bar{P}_{ik}), v(\bar{P}_{ik})$ ergeben sich durch Anwendung der Verträglichkeitsbedingung (9) auf die Linienelemente m'_{ik} und $m''_{i,k+1}$. Man ersetzt wieder p und q

durch die Näherungswerte p_{ik} und q'_{ik} bzw. q''_{ik} und die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$ usf. durch Differenzenquotienten, z. B.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{m'_{12}} = \frac{u(\bar{P}_{12}) - u(P_{12})}{y(\bar{P}_{12}) - y(P_{12})},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{m''_{12}} = \frac{u(\bar{P}_{12}) - u(P_{13})}{y(\bar{P}_{12}) - y(P_{13})},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{l_{12}} = \frac{u(P_{22}) - u(P_{12})}{x(P_{22}) - x(P_{12})}.$$

Dadurch erhält man für jeden Punkt \bar{P}_{ik} je 2 lineare Bestimmungsgleichungen zur Berechnung der gesuchten Näherungswerte

$$u(\bar{P}_{ik}), v(\bar{P}_{ik}).$$

Die Punkte \bar{P}_{ik} liegen ebenso wie die Ausgangspunkte P_{ik} für $i = \text{const}$ in parallelen Ebenen $x = \text{const}$, jedoch für $k = \text{const}$ nicht in parallelen Ebenen $y = \text{const}$. Wir gehen daher zu den Schnittpunkten P_{ik}^* der Geraden $P_{ik}\bar{P}_{ik}$ mit den Ebenen

$$y = \varepsilon, \quad y = 3\varepsilon, \quad y = 5\varepsilon, \quad \dots \quad y = (2n-1)\varepsilon$$

über und ordnen ihnen die durch lineare Interpolation sich ergebenden Funktionswerte $u(P_{ik}^*)$, $v(P_{ik}^*)$ zu. Mit den Punkten P_{ik}^* und ihren Funktionswerten läßt sich dann die Gitterkonstruktion in derselben Weise wie bei den Ausgangspunkten P_{ik} durchführen.

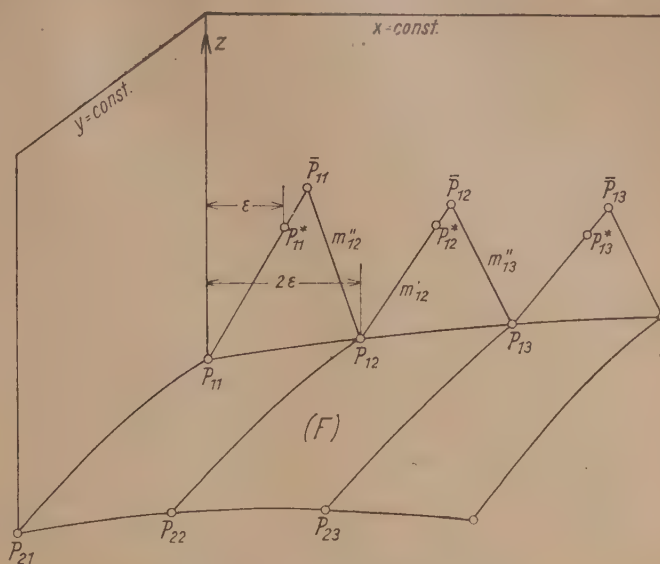


Bild 8. Schema für die Gitterkonstruktion

3.3 Gitterkonstruktion bei einer quasilinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

Bei Systemen von 3 quasilinearen Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 a_{1k} u_k + \sum b_{1k} v_k + \sum c_{1k} w_k &= g_1, \\ \sum a_{2k} u_k + \sum b_{2k} v_k + \sum c_{2k} w_k &= g_2, \\ \sum a_{3k} u_k + \sum b_{3k} v_k + \sum c_{3k} w_k &= g_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

für die 3 gesuchten Funktionen $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ treten an Stelle der Gleichungen (8) und (9) die Richtungsbedingung

$$R = \begin{vmatrix} a_{11}p + a_{12}q - a_{13} & b_{11}p + b_{12}q - b_{13} & c_{11}p + c_{12}q - c_{13} \\ a_{12}p + a_{22}q - a_{23} & b_{21}p + b_{22}q - b_{23} & c_{21}p + c_{22}q - c_{23} \\ a_{31}p + a_{32}q - a_{33} & b_{31}p + b_{32}q - b_{33} & c_{31}p + c_{32}q - c_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

und die Verträglichkeitsbedingung

$$I = \begin{vmatrix} a_{11}p + a_{12}q - a_{13} & b_{11}p + b_{12}q - b_{13} & a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y} + b_{11}\frac{\partial v}{\partial x} + b_{12}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{11}\frac{\partial w}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial w}{\partial y} - g_1 \\ a_{21}p + a_{22}q - a_{23} & b_{21}p + b_{22}q - b_{23} & a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y} + b_{21}\frac{\partial v}{\partial x} + b_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{21}\frac{\partial w}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial w}{\partial y} - g_2 \\ a_{31}p + a_{32}q - a_{33} & b_{31}p + b_{32}q - b_{33} & a_{31}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{32}\frac{\partial u}{\partial y} + b_{31}\frac{\partial v}{\partial x} + b_{32}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{31}\frac{\partial w}{\partial x} + c_{32}\frac{\partial w}{\partial y} - g_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (12).$$

Wir beschränken uns auf den praktisch wichtigsten Spezialfall, nämlich die quasilineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\boxed{\sum \sum A_{ik} \varphi_{ik} = G} \quad (A_{ik} = A_{ki}) \dots \dots (13)$$

für die gesuchte Funktion $\varphi(x, y, z)$. Die Koeffizienten A_{ik} und G sind Funktionen von x, y, z und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (— nicht aber von φ selbst —). Durch den Ansatz

$$\boxed{u = \varphi_1, \quad v = \varphi_2, \quad w = \varphi_3} \dots \dots \dots (14)$$

wird die Differentialgleichung (13) äquivalent mit dem System der 3 Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} A_{11} u_1 + A_{12} u_2 + A_{13} u_3 + A_{21} v_1 + A_{22} v_2 + A_{23} v_3 + A_{31} w_1 + A_{32} w_2 + A_{33} w_3 &= G, \\ u_3 &= 0, \\ v_3 &= 0, \\ w_2 &= 0. \end{aligned}$$

Hierzu folgt aus Gleichung (11) die Richtungsbedingung

$$\boxed{R = A_{11} p^2 + 2 A_{12} p q + A_{22} q^2 - 2 A_{13} p - 2 A_{23} q + A_{33} = 0} \dots \dots (15)$$

und aus Gleichung (12) die Verträglichkeitsbedingung

$$\left. \begin{aligned} V &\equiv A_{11} \frac{\delta u}{\delta x} + A_{12} \left(\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) + A_{22} \frac{\delta v}{\delta y} + (2 A_{13} - A_{11} p - A_{12} q) \frac{\delta w}{\delta x} \\ &\quad + (2 A_{23} - A_{12} p - A_{22} q) \frac{\delta w}{\delta y} - G = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (16).$$

Sie läßt sich mit Hilfe der aus

$$\frac{\delta u}{\delta y} = u_2 + u_3 q, \quad \frac{\delta v}{\delta x} = v_1 + v_3 p, \quad \frac{\delta w}{\delta x} = w_1 + w_3 p, \quad \frac{\delta w}{\delta y} = w_2 + w_3 q$$

unter Berücksichtigung der Gleichungen $u_3 = w_1, \quad v_3 = w_2$ folgenden Zusatzbedingungen

$$\boxed{\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta v}{\delta x} + q \frac{\delta w}{\delta x} - p \frac{\delta w}{\delta y}} \dots \dots \dots (17)$$

durch Elimination von $\frac{\delta u}{\delta y}$ umformen in

$$\boxed{\begin{aligned} V &\equiv A_{11} \frac{\delta u}{\delta x} + 2 A_{12} \frac{\delta v}{\delta x} + (2 A_{13} - A_{11} p) \frac{\delta w}{\delta x} + A_{22} \frac{\delta v}{\delta y} \\ &\quad + (2 A_{23} - 2 A_{12} p - A_{22} q) \frac{\delta w}{\delta y} - G = 0 \end{aligned}} \dots \dots \dots (18).$$

Die Richtungsbedingung (15) ist wieder in p, q quadratisch, die Richtungskegel sind also wie in Ziff. 3,1 Kegel 2. Klasse. Die Zusatzbedingung (17) bringt zum Ausdruck, daß die Projektion des Vektors $\text{rot}(u, v, w)$ auf die Flächennormale $(p, q, -1)$ verschwindet.

Die Gitterkonstruktion von Ziff. 3,2 ändert sich nur insofern, als jetzt in jedem Punkt \bar{P}_{ik} die 3 Unbekannten $u(\bar{P}_{ik}), v(\bar{P}_{ik}), w(\bar{P}_{ik})$ zu bestimmen sind. Da aber die Verträglichkeitsbedingung (18) nur die beiden Ableitungen $\frac{\delta v}{\delta y}, \frac{\delta w}{\delta y}$, nicht aber $\frac{\delta u}{\delta y}$ enthält, liefert sie jeweils 2 lineare Bestimmungsgleichungen für die 2 Unbekannten $v(\bar{P}_{ik}), w(\bar{P}_{ik})$. Nach deren Berechnung erhält man aus der als Differenzengleichung umgeschriebenen Zusatzbedingung (17) eine lineare Bestimmungsgleichung für die dritte Unbekannte $u(\bar{P}_{ik})$.

3.4. Erläuterung an der stationären Überschallströmung

Wir erläutern die 3-dimensionale Charakteristikentheorie am Beispiel der stationären räumlichen Überschallströmung. Dabei beschränken wir uns der Kürze halber auf den Sonderfall der wirbelfreien und daher isentropischen Strömung. Es existiert dann ein Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y, z)$, aus dem sich die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w nach Gl. (14) herleiten lassen. Die erste der Gleichungen (1) liefert für das Potential in cartesischen Koordinaten die homogene Differentialgleichung

$$(u^2 - a^2) \varphi_{11} + (v^2 - a^2) \varphi_{22} + (w^2 - a^2) \varphi_{33} + 2 v w \varphi_{23} + 2 w u \varphi_{31} + 2 u v \varphi_{12} = 0 \quad (19)$$

oder in Zylinderkoordinaten (Bild 1) die nichthomogene Differentialgleichung

$$\frac{1}{r^2}(\bar{u}^2 - a^2)\varphi_{11} + (\bar{v}^2 - a^2)\varphi_{22} + (\bar{w}^2 - a^2)\varphi_{33} + 2\bar{v}\bar{w}\varphi_{23} + \frac{2\bar{w}\bar{u}}{r}\varphi_{31} + \frac{2\bar{u}\bar{v}}{r}\varphi_{12} = \frac{\bar{v}}{r}(\bar{u}^2 + a^2) \quad (20);$$

in Gleichung (20) sind die Indizes 1, 2, 3 den Koordinaten ω, r, z zugeordnet und an Stelle von Gleichung (14) tritt

$$\bar{u} = \frac{1}{r}\varphi_1, \quad \bar{v} = \varphi_2, \quad \bar{w} = \varphi_3.$$

Die Gitterkonstruktion von Ziff. 3,3 läßt sich unmittelbar auf Gleichung (19) oder (20) anwenden; im letzteren Fall wird das Gitter außer von charakteristischen Flächen von Ebenen $\omega = \text{const}$ durch die Achse des Zylinderkoordinatensystems und von coaxialen Zylindern $r = \text{const}$ aufgebaut.

Die charakteristischen Kegel, Flächen und Konoide sind die Mach-Kegel, Mach-Flächen und Mach-Konoide der Überschallströmung. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Flächenelemente den Mach-Winkel α ($\sin \alpha = \text{Schallgeschwindigkeit} : \text{Strömungsgeschwindigkeit}$ $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$) mit der Strömungsrichtung einschließen oder, was dasselbe bedeutet, daß die zu den Flächenelementen senkrechte Komponente des Geschwindigkeitsvektors gleich der örtlichen Schallgeschwindigkeit ist. Hieraus ergibt sich anschaulich-physikalisch in Übereinstimmung mit Satz 3 am Ende von Ziff. 3,1, daß eine in einem Punkt P wirksame kleine Störung sich nur im Innern des von P stromabwärts laufenden Mach-Konoids (Einflußbereich) ausbreitet.

Die Gitterkonstruktion läßt sich sinngemäß auf Anfangswertprobleme übertragen, bei denen, wie dies bei Aufgaben der Gasdynamik oft der Fall ist, Anfangswerte auf einer charakteristischen Fläche gegeben sind und außerdem eine Randbedingung (z. B. tangentielle Strömung) an einer anderen Fläche zu erfüllen ist. Ferner läßt sich die entsprechend verallgemeinerte Gitterkonstruktion auch auf die 4 Differentialgleichungen (1) der nichtisentropischen Überschallströmung mit den 4 gesuchten Funktionen u, v, w, s anwenden. Als charakteristische Flächen hat man hier einerseits die Mach-Flächen wie bei der isentropischen Strömung und andererseits die von Stromlinien erzeugten Flächen.

Was wird aus der Gitterkonstruktion in den in Ziff. 2 behandelten Spezialfällen mit besonderen Symmetrieeigenschaften? Bei drehsymmetrischen Strömungen braucht man die Gitterkonstruktion nur in einer Meridianebene ($\omega = 0$) durchzuführen. Sie geht dabei in die bekannte 2-dimensionale Charakteristikenkonstruktion über; die drehsymmetrischen Mach-Flächen schneiden die Meridianebene nach den Charakteristiken des 2-dimensionalen Problems mit den 2 unabhängigen Veränderlichen r, z . Bei Kegelsymmetrie wird der Arbeitsaufwand der Gitterkonstruktion sehr verringert, da die für einen Gitterpunkt P_{ik}^* gefundenen Werte zugleich für alle Punkte der Halbgeraden $0P_{ik}^*$ ($0 = \text{Symmetriezentrum}$) gelten und daher nur eine charakteristische Fläche konstruiert werden muß. Man kommt jedoch in Polarkoordinaten R, ϑ, ω (Bild 2) nicht zu einem 2-dimensionalen Charakteristikenverfahren mit den 2 unabhängigen Veränderlichen ϑ, ω . Eine in einem Punkt P angreifende Störung geht nämlich wegen der Kegelsymmetrie sogleich auf die ganze Halbgerade OP über und breitet sich daher auf das Innere des Mach-Kegels mit der Spitze O aus. Alle Einflußgebiete fallen also mit diesem Kegel zusammen und man hat daher auf einer Schnittkugel $R = \text{const}$ mit den 2 unabhängigen Veränderlichen ϑ, ω im Innern des Mach-Kegels keine reellen Charakteristiken.

In dem in der Einleitung genannten Buch von A. Ferri [8] wird die Richtungsbedingung (15) und die Verträglichkeitsbedingung (18) für die Potentialgleichung (20) der wirbelfreien Überschallströmung ohne Bezugnahme auf die allgemeine Charakteristikentheorie hergeleitet. Mit Hilfe einer Gitterkonstruktion wird dann die Strömung um einen aus Drehkegel und Drehzylinder zusammengesetzten Drehkörper unter kleinem Anstellwinkel näherungsweise berechnet. Das Ergebnis bleibt jedoch aus 2 Gründen fragwürdig: Erstens wird die Strömung um den Kegel mit einem halbliniaren Verfahren (vgl. Ziff. 2,2) ermittelt und die strengere dreidimensionale Gitterkonstruktion erst bei der Expansionsströmung am Zylinder verwendet. Zweitens müßte die durch den Anstellwinkel hervorgerufene Wirbelbildung berücksichtigt und demgemäß das allgemeinere Differentialgleichungssystem (1) zugrunde gelegt werden.

4. Zusammenfassung

Im ersten Teil der Arbeit wurden 3-dimensionale Probleme der Charakteristikentheorie betrachtet, welche sich wegen gewisser Symmetrien auf 2-dimensionale Probleme reduzieren lassen, und Nachbarlösungen solcher symmetrischen Lösungen (nahezu drehsymmetrische bzw. nahezu kegelsymmetrische Lösungen) mit einem halbliniaren Näherungsverfahren ebenfalls auf 2-dimensionale Aufgaben zurückgeführt.

Im zweiten Teil wurde für die im eigentlichen Sinne 3-dimensionalen Aufgaben mit Hilfe einer Gitterkonstruktion ein Differenzenverfahren entwickelt, das eine naturgemäße Verallgemeinerung des bekannten 2-dimensionalen Massauschen Charakteristikenverfahrens darstellt.

Zunächst wurden die für das Verständnis des Verfahrens notwendigen Grundbegriffe der Charakteristikentheorie zusammengestellt und hierauf die einzelnen Schritte des Verfahrens im Sinne einer Gebrauchsanweisung ausführlich erörtert.

Literatur

- [1] Gasdynamik:
L. Prandtl und A. Busemann: Stodola-Festschrift. Zürich 1929, S. 499. Bezüglich weiterer Zitate vgl. den FIAT-Bericht von R. Sauer über Gasdynamik. Angew. Math. Bd. V, Teil III, S. 101–128.
 - [2] Strömungen in seichten Gewässern:
C. Preiswerk: Dissertation ETH Zürich 1938.
J. J. Stocker: The formation of breakers and bores. Comm. Appl. Math. New York, Bd. 1, Heft 1 (1948), S. 1–87.
Anneli Lax: Decaying shocks. Comm. Appl. Math. New York, Bd. 1, Heft 3 (1948), S. 247–257.
 - [3] Plastizität:
H. Neuber: Allgemeine Lösung des ebenen Plastizitätsproblems für beliebiges isotropes und anisotropes Fließgesetz. Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 253–257.
R. Sauer: Gleitkurvennetze der ebenen plastischen Spannungsverteilungen bei beliebigem Fließgesetz. Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 274–279.
 - [4] R. Sauer: Luftfahrt-Forsch. 19 (1942), S. 148–152.
 - [5] Stone: Nat. defense Res. Comm. Rep. no. A 358 (1945).
 - [6] Mark M. Lotkin: J. aeronaut. Sci. 15 (1948), S. 656–660.
 - [7] C. Ferrari: Atti R. Accad. Sci. Torino 72 (1936).
 - [8] A. Ferri: Elements of aerodynamics of supersonic flows. Macmillan Comp. New York (1949), S. 282 bis 291.
 - [9] K. Oswatitsch: Über die Charakteristikenverfahren der Hydrodynamik. Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947), S. 195–208 und S. 264–270.
 - [10] R. Sauer: Méthodes mathématiques de la théorie des fluides compressibles. Béranger Paris (im Druck), §§ 20–22.
 - [11] A. Busemann: Z. angew. Math. Mech. 9 (1929), S. 496–498.
 - [12] M. F. Bourquardt: Comptes rendus Paris 194 (1932), S. 846.
 - [13] G. J. Taylor — I. C. Maccoll: Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A 139 (1933), S. 278–311.
 - [14] A. Busemann: Dtsch. Akad. Luftfahrt-Forsch. 7B (1943), S. 105–120.
 - [15] A. E. Puckett: J. aeronaut. Sci. 13 (1946), Heft 9.
 - [16] Th. v. Kármán: J. aeronaut. Sci. 14 (1947), Heft 7.
 - [17] R. Courant — D. Hilbert: Methoden der math. Physik. Bd. II. Berlin: Springer 1937. Vgl. insbesondere S. 346ff.
 - [18] J. Hadamard: Leçons sur le problème de Cauchy. Paris 1932.
- Eingegangen am 24. 10. 49.

Eine verschärfte Fehlerabschätzung zum Extrapolationsverfahren von Adams¹⁾

Von Johannes Weißinger in Hamburg

Für das Adams'sche Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen r -ter Ordnung sind zwei wesentlich verschiedene Fehlerabschätzungen bekannt ([1], [2]). Da die letztere zwar schärfer ist, aber eine gewisse Lücke enthält, wird nach dem Verfahren von [1] eine ähnlich scharfe Schranke wie in [2] hergeleitet.

For the method of Adams performing the integration of ordinary differential equations of the r -th order, two estimations of the error are known that differ essentially from one another ([1], [2]). The latter being more efficient, but marked by a certain inaccuracy, limits similarly efficient as [2] are deduced following the line of [1].

Pour la méthode de Adams d'intégration d'équations différentielles ordinaires du ordre r on connaît deux procédés à l'estimation d'erreur ([1], [2]), essentiellement différents l'un de l'autre. [2], bien qu'il soit plus efficace, manque de clarté dans un point principal. À l'aide du procédé [1] on dérive une estimation d'une efficacité semblable à [2].

Для решения простых дифференциальных уравнений порядка r по методу Адамса имеются два существенно различные способа оценки погрешности ([1], [2]). Так как второй способ более точен, но содержит одну принципиальную неясность, то здесь проводится по способу [1] оценка погрешности такой-же точности, как и по способу [2].

1. Bezeichnungen und Voraussetzungen

$y(x)$ = exakte Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$; $f(x, y)$ habe stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung $r + 1$. Anfangsbedingung: $y(x_0) = y_0$.

K = Lipschitzkonstante von $f(x, y)$: $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|$.

F_{r+1} = Konstante, so daß $F_{r+1} \geq \left| \frac{d^r}{dx^r} f(x, y(x)) \right|$.

$\tilde{y}(x)$ = Näherungslösung nach dem Extrapolationsverfahren r -ter Ordnung.

$x_i = x + ih$; h = Schrittweite.

¹⁾ Teil eines auf der Jahrestagung der GaMM am 19. 4. 50 in Darmstadt gehaltenen Vortrags. Zu den im 3. Abschnitt gemachten Feststellungen und der darauf gegründeten Kritik an [3] war auch H. Unger gelangt.

Ferner werde gesetzt

$$y(x)_i = y_i, \quad \tilde{y}(x)_i = \tilde{y}_i, \quad f(x_i, y_i) = f_i, \quad f(x_i, \tilde{y}_i) = \tilde{f}_i.$$

Nach dem Extrapolationsverfahren ergeben sich die \tilde{y}_i aus $r+1$ Anfangswerten $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_r$ mittels

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + h \sum_{e=0}^r \alpha_e \tilde{f}_{i-e}.$$

Dabei ist

$$\alpha_e = (-1)^e \sum_{\sigma=e}^r \binom{\sigma}{e} a_\sigma, \quad a_\sigma = \frac{1}{\sigma!} \int_0^1 u(u+1) \cdots (u+\sigma-1) du.$$

Schließlich sei ε eine Schranke für den Anfangsfehler:

$$\varepsilon \geq |\tilde{y}_i - y_i|, \quad i = 0, 1, \dots, r.$$

2. Die v. Misessche Fehlerabschätzung

Um den Fehler

$$\varepsilon_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - y_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - y_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(\xi)) d\xi$$

abzuschätzen, schreibt v. Mises [1]

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + h \sum_{e=0}^r \alpha_e [\tilde{f}_{i-e} - f_{i-e}] + q_i \dots \dots \dots (2,1),$$

wobei der „Quadraturfehler“

$$q_i = h \sum_{e=0}^r \alpha_e f(x_{i-e}, y_{i-e}) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(\xi)) d\xi$$

durch

$$|q_i| \leq q = h^{r+2} a_{r+1} F_{r+1}$$

abgeschätzt werden kann. Aus der Lipschitzbedingung ergibt sich dann die Differenzengleichung

$$|\varepsilon_{i+1}| \leq |\varepsilon_i| + hK \sum_{e=0}^r |\alpha_e| |\varepsilon_{i-e}| + q \dots \dots \dots (2,2),$$

und jede Lösung E_i der entsprechenden Gleichung

$$E_{i+1} = E_i + hK \sum_{e=0}^r |\alpha_e| E_{i-e} + q \dots \dots \dots (2,3)$$

liefert eine Majorante für die $|\varepsilon_i|$ und damit eine Fehlerabschätzung, falls nur

$$E_i \geq |\varepsilon_i|, \quad i = 0, 1, \dots, r \dots \dots \dots (2,4)$$

ist. Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$z^{r+1} - z^r - hK \sum_{e=0}^r |\alpha_e| z^{r-e} = 0 \dots \dots \dots (2,5)$$

hat nach der Cartesischen Zeichenregel genau eine positive Wurzel z_0 , die offenbar überdies größer als 1 ist. Dann ist

$$E_i = Cz_0^i - \frac{q}{hKA}, \quad A = \sum_{e=0}^r |\alpha_e| = \sum_{\sigma=0}^r 2^\sigma a_\sigma \dots \dots \dots (2,6)$$

mit einer beliebigen Konstanten C eine partikuläre Lösung von (2,3). Wählt man

$$C = \varepsilon + \frac{q}{hKA},$$

so ist auch (2,4) befriedigt und damit in

$$|\tilde{y}_i - y_i| \leq E_i = \varepsilon z_0^i + \frac{q}{hKA} (z_0^i - 1), \quad i = 0, 1, \dots, r \dots \dots (2,7)$$

eine Fehlerabschätzung gefunden.

Aus der leicht zu beweisenden Ungleichung

$$1 < z_0 < 1 + hKA$$

folgt weiter die einfachere, aber etwas gröbere Abschätzung

$$|\tilde{y}_i - y_i| \leq \varepsilon (1 + hKA)^i + \frac{q}{hKA} [(1 + hKA)^i - 1], \quad i = 0, 1, \dots \dots \dots (2,8).$$

Soweit v. Mises.

An dieser Abschätzung ist unbefriedigend, daß bei Festhaltung der von r unabhängigen Größen die Fehlerschranke mit wachsendem r zunimmt, und zwar sehr kräftig. Aus der sofort ersichtlichen Ungleichung

$$\frac{1}{2^\sigma} \leq a_\sigma \leq 1, \quad \sigma = 1, 2, \dots \quad (2,9)$$

ergibt sich nämlich

$$\frac{2^r}{r} \leq 1 + \sum_{\sigma=1}^r \frac{2^\sigma}{2^\sigma} \leq A \leq \sum_{\sigma=0}^r 2^\sigma < 2^{r+1} \quad (2,10).$$

Daraus folgt nicht nur, daß der vom Anfangsfehler ε herrührende Term in (2,8) mit $r \rightarrow \infty$ gegen ∞ geht, sondern auch der vom Quadraturfehler herrührende, wenn man annimmt, daß F_{r+1} für $r \rightarrow \infty$ nicht oder jedenfalls nicht zu schnell gegen Null geht. Denn dieser Term wächst stärker als

$$\left(\frac{h}{2}\right)^{r+1} (1 + hKA)^i > \frac{K^i h^{i+1}}{2} \left[\frac{h}{2} \left(\frac{2}{r} \right)^i \right]^r,$$

was bei genügend großem i mit r gegen ∞ geht.

Nun lassen sich zwar leicht Beispiele angeben, wo bei gleichem ε das Verfahren höherer Ordnung wirklich eine schlechtere Näherungslösung liefert. Aber daß eine Vergrößerung von r sich so ungünstig auswirkt — insbesondere im Term des Quadraturfehlers — wie in der obigen Fehlerschranke, erscheint doch wenig plausibel.

Bevor wir die Abschätzung zu verbessern suchen, noch zwei später gebrauchte Bemerkungen!

Erstens sei darauf hingewiesen, daß man die Ungleichung (2,8) ganz trivial ohne Betrachtung des charakteristischen Polynoms (2,5) erhält, wenn man die Differenzengleichung (2,3) ersetzt durch die Gleichung

$$E_{i+1}^* = (1 + hKA) E_i^* + q,$$

die offenbar erst recht eine Majorante für die $|\varepsilon_i|$ liefert und gerade die rechte Seite von (2,8) zur Lösung hat. Man kann (2,8) auf diese Weise sogar noch etwas verschärfen. Sicher gilt nämlich

$$|\varepsilon_{r+1}| \leq (1 + hKA) \varepsilon + q$$

und durch Induktion folgt

$$|\varepsilon_i| = |\tilde{y}_i - y_i| \leq \varepsilon (1 + hKA)^{i-r} + \frac{q}{hKA} [(1 + hKA)^{i-r} - 1], \quad i = r, r+1, \dots \quad (2,11).$$

Zweitens gilt bekanntlich für beliebiges c und i

$$\left(1 + \frac{c}{i}\right)^i \leq e^c,$$

und für genügend kleine c unterscheiden sich beide Seiten beliebig wenig. Wegen $h = \frac{x_i - x_0}{i}$ kann man daher statt (2,8) etwas weniger scharf auch schreiben

$$|\tilde{y}_i - y_i| \leq \varepsilon e^{AK(x_i - x_0)} + \frac{q}{hKA} [e^{AK(x_i - x_0)} - 1] \quad (2,12),$$

wobei sich diese Schranke von der alten für genügend kleines h beliebig wenig unterscheidet.

3. Die Abschätzung von Tollmien und Fricke

Die zuletzt erhaltene Abschätzung erinnert stark an folgenden bekannten Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen: Genügen $y(x)$ bzw. $z(x)$ den Differentialgleichungen

$$y' = f(x, y) \quad \text{bzw.} \quad z' = g(x, z)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0,$$

und ist K die Lipschitzkonstante von $f(x, y)$ sowie

$$M = \text{Max} |f(x, z(x)) - g(x, z(x))|,$$

so gilt

$$|z(x) - y(x)| \leq |z_0 - y_0| e^{K|x-x_0|} + \frac{M}{K} (e^{K|x-x_0|} - 1).$$

Es liegt nahe — und dieser Weg ist in [2] und [3] beschritten worden —, in dieser Formel $z(x)$ mit der obigen Näherungslösung $\tilde{y}(x)$ und infolgedessen $g(x, z)$ im Intervall (x_i, x_{i+1}) mit dem

durch die Werte $\tilde{f}_{i-k} = f(x_{i-k}, \tilde{y}_{i-k})$ ($k = 0, 1, \dots, r$) gelegten Interpolationspolynom $P_i(x)$ der Ordnung r zu identifizieren und dann auf Grund der bekannten Fehlerformel

$$f(x, \tilde{y}(x)) - P_i(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i-1}) \cdots (x - x_{i-r})}{(r+1)!} \left(\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} f(x, \tilde{y}(x)) \right)_{x=\xi} \quad (3,1)$$

für den Interpolationsfehler zu setzen

$$M = h^{r+1} \text{Max} \left| \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} f(x, \tilde{y}(x)) \right| = h^{r+1} \tilde{F}_{r+1}.$$

Die so erhaltene Formel

$$|\tilde{y}_i - y_i| \leq \varepsilon e^{K(x-x_r)} + h^{r+1} \frac{\tilde{F}_{r+1}}{K} (e^{K(x_i-x_r)} - 1) \quad (3,2)$$

bzw. die durch eine Zusatzbetrachtung zu erhaltende verschärfte Formel

$$|\tilde{y}_i - y_i| \leq \varepsilon e^{K(x-x_r)} + h^{r+1} \frac{a_{r+1} \tilde{F}_{r+1}}{K} (e^{K(x_i-x_r)} - 1) \quad (3,3)$$

wird mit (2,12) im wesentlichen identisch, wenn man dort F_{r+1} durch \tilde{F}_{r+1} und A durch 1 ersetzt. Die Größe A , die für große r die Abschätzung so verschlechtert, tritt jetzt also gar nicht auf.

Leider ist der eben skizzierte Weg nicht gangbar. Denn die Anwendung der Formel (3,1) setzt $(r+1)$ -malige Differenzierbarkeit von $\tilde{y}(x)$ im Intervall (x_{i-r}, x_{i+1}) voraus. Andererseits ist $\tilde{y}'(x) = P_i'(x)$ in (x_i, x_{i+1}) , $\tilde{y}'(x) = P_{i-1}'(x)$ in (x_{i-1}, x_i) usw.; und da $P_i(x)$, $P_{i-1}(x)$ im Punkte x_i im allgemeinen nicht übereinstimmen, so haben die erste und alle höheren Ableitungen von $\tilde{y}(x)$ Sprünge in den x_i . Die in (3,3) auftretende Größe $\tilde{F}_{r+1} = \text{Max} \left| \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} f(x, \tilde{y}(x)) \right|$ ist also gar nicht definiert. In [2] wird darauf hingewiesen, daß man im Falle des Nichtexistierens der Ableitungen die Differenzenquotienten nehmen muß. Eine Abschätzung für diese liegt aber bisher nicht vor.

Andererseits wäre natürlich eine ähnliche Formel wie (3,3), die A nicht enthält, sehr erwünscht, da sie — insbesondere für große Integrationsintervalle $x_i - x_0$ — bedeutend schärfere Schranken als die v. Misessche Formel liefern würde.

4. Verschärfung der v. Misesschen Abschätzung

Man kann nicht erwarten, daß die Formel (2,12) (und daher erst recht nicht die schärfere Formel (2,8)) richtig bleibt, wenn man einfach $A = 1$ setzt. Für das Problem

$$y' = y, \quad y(0) = 0, \quad \text{also} \quad y(x) \equiv 0, \quad q = 0, \quad K = 1$$

würde man dann nämlich erhalten

$$|y_i| \leq \varepsilon \cdot e^{x_i} = \varepsilon e^{ih},$$

während man aus den Anfangswerten

$$\tilde{y}_r = \varepsilon, \quad \tilde{y}_{r-1} = -\varepsilon, \dots, \quad \tilde{y}_0 = (-1)^r \varepsilon$$

wegen $\alpha_e = (-1)^e |\alpha_e|$ errechnen würde

$$\tilde{y}_{r+1} = \varepsilon + h \sum_{e=0}^r |\alpha_e| \varepsilon = (1 + Ah) \varepsilon,$$

so daß also

$$1 + Ah \leq e^{(r+1)h}$$

gelten müßte, was z. B. für $A > r + 1$ und genügend kleine h sicher nicht richtig ist. Statt dessen beweisen wir den

Satz: Zu beliebig kleinem $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ gibt es (bei beliebigem festem r) stets ein $H > 0$, so daß für alle h mit $0 \leq h \leq H$ und für beliebig große i gilt

$$|\tilde{y}_i - y_i| \leq \varepsilon^* e^{A^* K (x_i - x_0)} + \frac{q}{h K A^*} [e^{A^* K (x_i - x_0)} - 1] \quad (4,1)$$

wobei

$$\varepsilon^* = \varepsilon(1 + \delta_1), \quad A^* = A(1 + \delta_2),$$

mit anderen Worten: In (2,12) darf man zwar A nicht genau durch 1, sondern nur (für entsprechend kleine Schrittweite h) durch eine beliebig nahe bei 1 gelegene Zahl A^* ersetzen, wenn man gleichzeitig ε ein wenig vergrößert.

Zum Beweise summieren wir (2,1) über die Indizes i bis $i-l$ und erhalten

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i-l} + h \sum_{\sigma=0}^{l+r} b_{\sigma} [f_{i-\sigma} - f_{i-l-\sigma}] + \sum_{\sigma=0}^l q_{i-\sigma} \dots \dots \dots (4,2)$$

mit

$$b_{\sigma} = \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{\sigma} & \text{für } 0 \leq \sigma \leq r-1 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1 & \text{,, } r \leq \sigma \leq l \\ \alpha_{\sigma-l} + \alpha_{\sigma-l+1} + \dots + \alpha_r & \text{,, } l+1 \leq \sigma \leq l+r \end{cases} \dots \dots \dots (4,3).$$

Dabei soll $l \geq r$ eine beliebige, aber feste natürliche Zahl sein.

Unter Benutzung der Lipschitzbedingung und der früheren Bezeichnungen ergibt sich daraus

$$|\varepsilon_{i+1}| \leq |\varepsilon_{i-l}| + hK \sum_{\sigma=0}^{l+r} |b_{\sigma}| |\varepsilon_{i-\sigma}| + (l+1)q \dots \dots \dots (4,4),$$

so daß man eine Majorante der $|\varepsilon_i|$ in jeder Lösung E_i der Differenzengleichung

$$E_{i+1} = E_{i-l} + hK \sum_{\sigma=0}^{l+r} |b_{\sigma}| E_{i-\sigma} + (l+1)q \dots \dots \dots (4,5)$$

erhält, welche den Anfangsbedingungen

$$E_i \geq |\varepsilon_i|, \quad i = 0, 1, \dots, l+r$$

genügt. Wir werden schärfer mit festem ε^* sogar

$$E_i \geq \varepsilon^* \geq |\varepsilon_i|, \quad i = 0, 1, \dots, l+r \dots \dots \dots (4,6)$$

fordern. Die charakteristische Gleichung

$$z^{l+r+1} - z^r - Kh \sum_{\sigma=0}^{l+r} |b_{\sigma}| z^{l+r-\sigma} = 0 \dots \dots \dots (4,7)$$

hat wieder genau eine Wurzel z_l rechts von 1, so daß

$$E_i = Cz_l^i - \frac{(l+1)q}{BhK}$$

mit beliebigem C und

$$B = \sum_{\sigma=0}^{l+r} |b_{\sigma}| \dots \dots \dots (4,8)$$

eine Lösung von (4,5) ist, welche mit

$$C = \varepsilon^* + \frac{(l+1)q}{BhK} = \varepsilon^* + \frac{q}{hKA^*}, \quad A^* = \frac{B}{l+1}$$

auch die Anfangsbedingungen (4,6) befriedigt. Wir bekommen daher folgende Abschätzung

$$|\tilde{y}_i - y_i| \leq \varepsilon^* z_l^i + \frac{q}{hKA^*} (z_l^i - 1) \dots \dots \dots (4,9).$$

Um zu Aussagen über z_l zu kommen, schreibt man (4,7) am besten in der Form

$$Kh = \frac{z^r(z^{l+1}-1)}{\sum_{\sigma=0}^{l+r} |b_{\sigma}| z^{l+r-\sigma}} = \kappa(z) \dots \dots \dots (4,10)$$

und untersucht die Funktion $\kappa(z)$. Setzt man noch

$$b_{\sigma}^* = \alpha_{\sigma+1} + \alpha_{\sigma+2} + \dots + \alpha_r = b_{l+1+\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq r-1 \dots \dots \dots (4,11),$$

so daß also

$$b_{\sigma}^* + b_{\sigma} = 1, \quad \text{und damit} \quad |b_{\sigma}^*| + |b_{\sigma}| \geq 1, \quad ||b_{\sigma}^*| - |b_{\sigma}|| \leq 1 \dots \dots \dots (4,12)$$

gilt, so wird

$$B = l+1-r + \sum_{\sigma=0}^{r-1} (|b_{\sigma}^*| + |b_{\sigma}|) \geq l+1 \dots \dots \dots (4,13)$$

und

$$\sum_{\sigma=0}^{l+r} |b_{\sigma}| z^{l+r-\sigma} = z^{l+1} \sum_{\sigma=0}^{r-1} |b_{\sigma}| z^{r-1-\sigma} + \sum_{\sigma=0}^{r-1} |b_{\sigma}^*| z^{r-1-\sigma} + \frac{z^{l+1}-1}{z-1} - \sum_{\sigma=0}^{r-1} z^{r-1-\sigma}.$$

Statt (4,10) kann man daher auch schreiben

$$\kappa(z) = \frac{z^r}{\frac{1}{z-1} + \sum_{\sigma=0}^{r-1} |b_{\sigma}| z^{r-1-\sigma} + \frac{1}{z^{l+1}-1} \sum_{\sigma=0}^{r-1} (|b_{\sigma}| + |b_{\sigma}^*| - 1) z^{r-1-\sigma}} \dots \dots \dots (4,14),$$

eine Form, die für die numerische Berechnung von $\kappa(z)$ ganz gut geeignet ist. Insbesondere erkennt man unmittelbar, daß $\kappa(z)$ bei festem $z > 1$ mit wachsendem l monoton zunimmt, so daß z_l bei festem Kh mit wachsendem l abnimmt, die Abschätzung (4,9) also verbessert wird (falls nicht ε^* zu groß wird).

Als Ableitung von $\kappa(z)$ an der Stelle 1 findet man aus (4,10) sofort

$$\kappa'(1) = \frac{l+1}{B} = \frac{1}{A^*},$$

so daß für kleine Kh näherungsweise gilt

$$z_l \approx 1 + A^* Kh.$$

Für die zweite Ableitung ergibt sich

$$\frac{B^2}{l+1} \kappa''(1) = l \sum_{\sigma=0}^{r-1} \{1 + |b_\sigma^*| - |b_\sigma|\} + 2 \sum_{\sigma=0}^{r-1} \sigma \{|b_\sigma| + |b_\sigma^*| - 1\} + 2 \sum_{\sigma=0}^{r-1} |b_\sigma^*|,$$

so daß also wegen (4,12)

$$\kappa''(1) > 0$$

gilt. Für genügend kleine Kh liegt die Kurve $\kappa(z)$ daher oberhalb ihrer Tangente in $z = 1$, d. h. es ist

$$1 < z_l \leq 1 + A^* Kh \quad (4,15)$$

und folglich

$$z_l^i \leq \left(1 + \frac{A^* K (x_i - x_0)}{i}\right)^i < e^{A^* K (x_i - x_0)},$$

woraus zusammen mit (4,9) die behauptete Formel (4,1) folgt. Es bleiben nur noch die Behauptungen über A^* und ε^* zu beweisen.

Zunächst kann man (bei festem, aber beliebigem r)

$$A^* = 1 + \frac{1}{l+1} \sum_{\sigma=0}^{r-1} (|b_\sigma| + |b_\sigma^*| - 1)$$

offenbar durch Wahl eines genügend großen l beliebig nahe bei 1 wählen. Bei nunmehr festem l beschränken wir uns auf so kleine h , daß (4,15) gilt, und bestimmten ε^* nach (2,11) zu

$$\varepsilon^* = \varepsilon(1 + hKA)^l + h^{r+2} \frac{a_{r+1} F_{r+1}}{hKA} [(1 + hKA)^l - 1] \quad (4,16).$$

Da l jetzt fest ist, kann ε^* durch Beschränkung auf genügend kleine h beliebig nahe bei ε gewählt werden. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

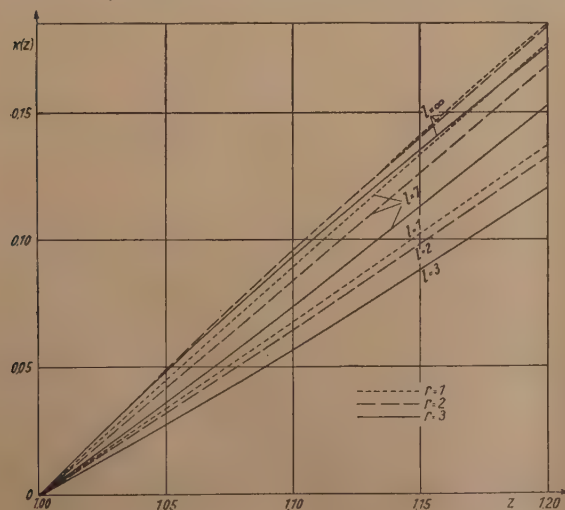


Bild 1. Die Funktion $\kappa(z)$ für verschiedene r und l

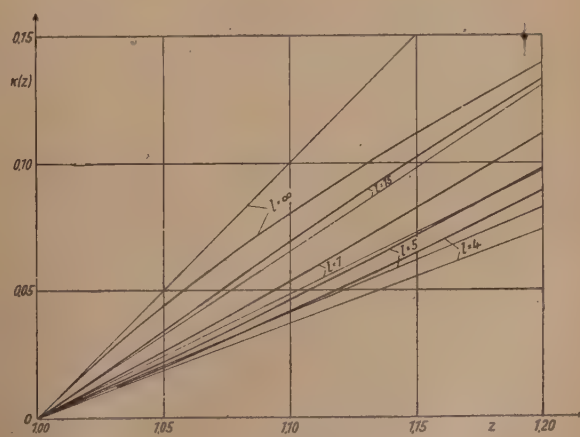


Bild 2. Die Funktion $\kappa(z)$ und ihre Tangente für $r=4$ und verschiedene l

Ausdrücklich sei vermerkt, daß der κ - bzw. z -Bereich, in dem (4,15) gilt, von l abhängt und für $l \rightarrow \infty$ auf Null zusammenschrumpft. Für $l \rightarrow \infty$ erhält man nämlich

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \kappa(z) = \kappa_\infty(z) = \frac{z^r}{z-1 + \sum_{\sigma=0}^{r-1} |b_\sigma| z^{r-1-\sigma}}$$

mit den Ableitungen

$$\kappa'_{\infty} = 1, \quad \kappa''_{\infty}(1) = 2 \left\{ r - \sum_{\sigma=0}^{r-1} |b_{\sigma}| \right\},$$

so daß wegen $\sum_{\sigma=0}^{r-1} b_{\sigma} = r + a_1 = r + \frac{1}{2}$

$$\kappa''_{\infty}(1) \leq -1$$

folgt. In der Praxis wird man aber ohnehin l nicht zu groß wählen, um ε^* nicht zu groß werden zu lassen, und da auch Kh selten größer als 0,15 sein wird, wird die Ungleichung (4,15) praktisch meistens erfüllt sein, wie ein Blick auf die Bilder 1 und 2 lehrt.

5. Zahlenwerte

Beispiel: Wir stellen zunächst noch einmal die praktisch wichtigsten Formeln des vorigen Abschnitts zusammen und geben die Zahlenwerte der darin vorkommenden Konstanten an.

Mit den in 1. eingeführten Bezeichnungen läßt sich für das Extrapolationsverfahren r -ter Ordnung der Fehler $|\tilde{y}_i - y_i|$ nach dem i -ten Schritt abschätzen durch

$$|\tilde{y}_i - y_i| \leq \varepsilon^* \cdot z_i^i + \frac{q}{hKA^*} (z_i^i - 1) \quad (5,1)$$

mit

$$q = h^{r+2} a_{r+1} F_{r+1} \quad (5,2)$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon (1 + hKA)^l + \frac{q}{hKA} [(1 + hKA)^l - 1] \quad (5,3).$$

Hierin ist l eine beliebige natürliche Zahl $r \leq l \leq i$ und z_l die positive Wurzel der Gleichung (4,10), die für einige Fälle aus den Bildern 1 und 2 entnommen werden kann. In der Praxis wird meist $z_l \leq 1 + hKA^*$ sein, so daß man dann etwas weniger scharf

$$|\tilde{y}_i - y_i| \leq \varepsilon^* (1 + hKA^*)^i + h^{r+2} \frac{a_{r+1} F_{r+1}}{hKA^*} [(1 + hKA^*)^i - 1] \quad (5,4)$$

schreiben kann. Die Konstanten a_{r+1} , A , A^* , können der folgenden Tabelle entnommen werden:

r	a_r	A	$(l+1)(A^*-1)$
0	1.0000	1.0000	0
1	0.5000	2.0000	1.0000
2	0.4167	3.6667	1.8333
3	0.3750	6.6667	3.6667
4	0.3486	12.2444	8.5472
5	0.3299	22.8222	17.8000
6	0.3169		

Zum Schluß wollen wir ein Beispiel betrachten, das auch in [1] und [3] behandelt worden ist:

$$y' = \frac{y-x}{y+x}, \quad y(0) = 1, \quad r = 4, \quad h = 0.02, \quad 0 \leq x \leq 2.00$$

$$F_5 = 8840, \quad Kh = 0.006, \quad q = a_5 h^6 F_5 = 1.865 \cdot 10^{-7}$$

$$\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}.$$

Nach v. Mises ergibt sich für den Fehler nach 100 Schritten die Schranke $|\varepsilon_{100}| \leq 1990 \cdot 10^{-6}$, während sich nach (2,3), falls man unzulässigerweise F_{r+1} statt \tilde{F}_{r+1} benutzt, die rund 80mal bessere Schranke $|\varepsilon_{100}| \leq 25 \cdot 10^{-6}$ ergeben würde (vgl. [3]). Nach unseren obigen Formeln erhält man für $l=7$ mit

$$\varepsilon^* = 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot (1.0734)^7 + \frac{1.865 \cdot 10^{-7}}{0.0734} ((1.0734)^7 - 1) = 2.454 \cdot 10^{-6}$$

und

$$A^* = 2.0684, \quad A^*Kh = 0.01241, \quad z_l < 1.01241$$

die Schranke

$$|\varepsilon_{100}| \leq 2.454 \cdot 10^{-6} \cdot (1.01241)^{100} + \frac{1.865 \cdot 10^{-7}}{0.01241} ((1.01241)^{100} - 1) \\ = 8.44 \cdot 10^{-6} + 36.62 \cdot 10^{-6} = 45.1 \cdot 10^{-6},$$

die nicht wesentlich schlechter als $25 \cdot 10^{-6}$ ist.

Gelegentlich kann man die Abschätzung noch verbessern, wenn man beachtet, daß man zur Berechnung von ε^* nicht die für das ganze Integrationsintervall $x_0 \leq x \leq x_i$, sondern nur die

für $x_0 \leq x \leq x_{l+r}$ gültigen Konstanten K, F_{r+1} zu nehmen braucht. In unserm Beispiel ist

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{(y+x)^2} < \frac{0,44}{1,40^2} = 0,225 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 0,22,$$

so daß sich mit $hK = 0,0045$, $AhK = 0,0551$

$$\varepsilon^* = 1,886 \cdot 10^{-6}, \quad |\varepsilon_{100}| \leq 43,1 \cdot 10^{-6},$$

also nur eine unwesentliche Verbesserung ergibt.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß der Grundgedanke der geschilderten Fehlerabschätzung offenbar allgemeiner anwendbar ist, wofür in einer weiteren Mitteilung einige Beispiele gegeben werden sollen.

6. Schrifttum

- [1] R. v. Mises: Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 10 (1930), S. 81.
- [2] W. Tollmien: Über die Fehlerabschätzung beim Adams'schen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 18 (1938), S. 83.
- [3] A. Fricke: Über die Fehlerabschätzung des Adams'schen Verfahrens zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung. Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 165.

Eingegangen den 18. 11. 49.

Zur Berechnung der Torsionseigenschwingungen von Maschinenwellen

Von Alfred Vogel in Stuttgart

Es wird die dynamische Matrix aufgestellt, deren charakteristische Zahlen (Eigenwerte) mit den Quadraten der Eigenfrequenzen des vorgelegten Schwingungssystems übereinstimmen. Für homogene Maschinen werden alle Eigenfrequenzen explizit, für teilhomogene Maschinen implizit mit Hilfe der Frequenzfunktionen angegeben, für inhomogene Maschinen werden die Eigenfrequenzen nach konvergenten Matrizenverfahren numerisch ermittelt.

The dynamical matrix is set up, the characteristic values of which are the squares of the natural frequencies of the given oscillating system. For homogenous machines, the natural frequencies are altogether given explicitly; for partly homogenous machines, they are given implicitly by aid of frequency functions, and for non-homogenous machines, they are found by converging matrix methods.

On définit la matrice dynamique, dont les valeurs propres sont les carrés des fréquences naturelles d'un système oscillant donné. Pour des machines homogènes toutes les fréquences naturelles sont calculées explicitement; pour des machines homogènes par parties elles sont données implicitement à l'aide des fonctions de fréquence. Enfin, pour des machines inhomogènes, elles sont trouvées numériquement par des méthodes convergentes à matrices.

Определяется „динамическая“ матрица, характеристические (собственные) значения которой соответствуют квадратам собственных частот данной колебательной системы. В случае однородных машин все собственные частоты выражаются в явном виде, в случае частично однородных машин — в неявной форме при помощи функций частоты, а в случае неоднородных машин собственные частоты находятся численным путем при помощи сходящегося матричного метода.

1. Einleitung

Es gibt eine große Anzahl von Verfahren zur Berechnung der Torsionsschwingungen von Maschinenwellen. K. Klotter¹⁾ hat alle bisher bekannt gewordenen Verfahren einer gründlichen Analyse unterzogen. In seinem Bericht findet sich keine Methode, die von der Matrizenrechnung Gebrauch macht. Da sich die Eigenfrequenzquadrate von ungedämpften Torsionsschwingungen als Eigenwerte einer Matrix darstellen lassen, liegt es nahe zu fragen, ob die Iterationsverfahren zur Berechnung der Maximalwurzel einer Matrix auch Verwendung finden können für die Berechnung der Eigenfrequenzen. Dem steht zunächst die Schwierigkeit entgegen, daß in der Praxis gar nicht die größten, sondern nur einige der kleinsten Eigenfrequenzen interessieren. Also müßte vor Anwendung eines Matrizenverfahrens zur Berechnung des größten Eigenwertes zuerst der Übergang zur reziproken Matrix geschaffen werden, und das ist im allgemeinen bei Matrizen höherer Ordnung lästig. Man kann jedoch den kleinsten Eigenwert auch ohne Umkehrung der Matrix dadurch gewinnen, daß man zweimal das Iterationsverfahren zur Berechnung der Maximalwurzel durchführt.²⁾

¹⁾ K. Klotter: Analyse der verschiedenen Verfahren zur Berechnung der Torsionseigenschwingungen von Maschinenwellen. Ingenieur-Arch. Bd. 17 (1949), S. 1.

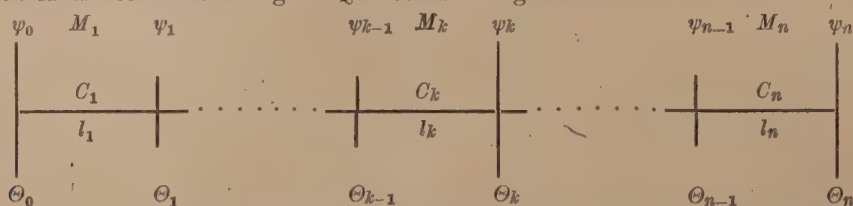
²⁾ A. Vogel: Zur Bestimmung der Eigenwerte einer Matrix durch Iteration. Z. angew. Math. Mech. Bd. 30 (1950), S. 174.

Die bekannten Matrizenverfahren können gleichermaßen auf homogene, teilhomogene und inhomogene Maschinen angewandt werden, haben jedoch nur für inhomogene Maschinen Bedeutung, weil sich für homogene Maschinen die Eigenfrequenzen explizit anschreiben lassen, während man für Maschinen mit homogenem Hauptteil und nur wenig Zusatzdrehmassen nach der von R. Grammel³⁾ angegebenen Methode der tabulierten Frequenzfunktionen bequem alle Eigenfrequenzen bestimmen kann.

In 2. wird die dynamische Matrix (Frequenzmatrix) für ungedämpfte Torsionseigenschwingungen von Maschinenwellen mit beliebig besetzten Drehmassen und beliebigen Drehsteifigkeiten aufgestellt. Im Falle der homogenen Maschine werden alle Eigenfrequenzen explizit angegeben (3.). Für Maschinen mit homogenem Hauptteil und einzelnen Zusatzdrehmassen wird die Frequenzfunktion nach einem Satz von J. J. Sylvester mit Hilfe der Frequenzfunktionen für den homogenen Teil der Maschine dargestellt (4.). Schließlich werden für eine mit fünf beliebig verteilten Drehmassen arbeitende inhomogene Maschine sämtliche Eigenfrequenzen nach einem Iterationsverfahren berechnet (5.).

2. Die Frequenzmatrix

Die auf ihre Torsionsschwingungen zu untersuchende Kurbelwelle mit ihren Arbeitszylindern und sonstigen Drehmassen sei in bekannter Weise⁴⁾ auf eine masselose glatte Welle mit $n+1$ einfachen Scheiben von kreisförmigem Querschnitt abgebildet.



Θ_k ($k=0, 1, \dots, n$) sei das polare Trägheitsmoment der k -ten Scheibe, kurz k -te Drehmasse genannt. Die Länge des k -ten Wellenstücks zwischen der $(k-1)$ -ten und k -ten Drehmasse sei l_k , die Torsionssteifigkeit eines solchen Wellenstücks sei C_k ($k=1, 2, \dots, n$). Bezeichnen wir noch die über den stationären Lauf der Maschine überlagerten Schwingungsausschläge der Drehmassen in bezug auf eine beliebige, raumfeste Richtung mit ψ_k ($k=0, 1, \dots, n$) und die sie hervorgerufenen Torsionsmomente mit M_k ($k=1, 2, \dots, n$), so lauten

a) die statischen Gleichungen

$$M_k = \frac{C_k}{l_k} (\psi_{k-1} - \psi_k) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (1),$$

b) die dynamischen Gleichungen

$$\Theta_k \ddot{\psi}_k = M_k - M_{k+1} \quad (k=0, 1, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (2),$$

mit $M_0 = M_{n+1} = 0$

Mit Hilfe der „Verdrehwinkel“⁵⁾

$$\varphi_k = \psi_k - \psi_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

läßt sich die Anzahl der Bewegungsgleichungen um eine herabsetzen. Aus (1) wird

$$\varphi_k = -\frac{l_k}{C_k} M_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (3),$$

aus (2) wird

$$\ddot{\varphi}_k = \ddot{\psi}_k - \ddot{\psi}_{k-1} = -\frac{M_{k-1}}{\Theta_{k-1}} + \left(\frac{1}{\Theta_{k-1}} + \frac{1}{\Theta_k} \right) M_k - \frac{M_{k+1}}{\Theta_k} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad \dots (4).$$

Wenn wir jetzt die Matrizen

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{K} = \begin{pmatrix} \frac{l_1}{C_1} \\ \vdots \\ \frac{l_n}{C_n} \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}; \quad \ddot{\Phi} = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\varphi}_n \end{pmatrix}$$

³⁾ R. Grammel: Ein neues Verfahren zur Berechnung der Drehschwingungszahlen von Kurbelwellen. Ingenieur-Arch. Bd. 2 (1931), S. 228.

⁴⁾ C. B. Biezeno — R. Grammel: Technische Dynamik. Berlin 1939, S. 967ff.

⁵⁾ T. Pöschl und L. Collatz: Über die Berechnung und Darstellung der Eigenfrequenzen homogener Maschinen mit Zusatzdrehmassen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 186.

und

$$\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Theta_0} & \frac{1}{\Theta_1} & & \frac{1}{\Theta_1} \\ & -\frac{1}{\Theta_1} & \frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2} & \frac{1}{\Theta_2} \\ & & & \\ & & & -\frac{1}{\Theta_{n-1}} & \frac{1}{\Theta_{n-1}} + \frac{1}{\Theta_n} \end{pmatrix}$$

eingeführen, so lassen sich die Gleichungssysteme (3) und (4) auf die einfache Form

$$\Phi = -\mathfrak{R} \mathfrak{M} \quad (5)$$

und

$$\ddot{\Phi} = \mathfrak{I} \mathfrak{M} \quad (6)$$

bringen. Nun kann man \mathfrak{M} eliminieren und entweder nach Φ oder $\ddot{\Phi}$ auflösen. Im ersten Fall erhält man aus (5) und (6)

$$\Phi = -\mathfrak{R} \mathfrak{I}^{-1} \ddot{\Phi},$$

im zweiten Fall

$$\ddot{\Phi} = -\mathfrak{I} \mathfrak{R}^{-1} \Phi \quad (7).$$

Die Umkehrung der Matrix \mathfrak{I} ist umständlich, dagegen läßt sich die Diagonalmatrix \mathfrak{R} einfach dadurch umkehren, daß man die Elemente in der Hauptdiagonale umkehrt. Wir setzen

$$\mathfrak{I} \mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{D}$$

und nennen \mathfrak{D} die „dynamische Matrix“. Sie hat die Form

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} c_1 + c'_1 & -c_2 & & \\ -c'_1 & c_2 + c'_2 & -c_3 & \\ & & & \\ & & & -c_{n-1} & c_n + c'_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

wenn man die Abkürzungen

$$c_k = \frac{C_k}{l_k \Theta_{k-1}} \quad \text{und} \quad c'_k = \frac{C_k}{l_k \Theta_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

verwendet. Die Koeffizienten c_k und c'_k heißen die Wellenkoeffizienten der Maschine.

Mit \mathfrak{D} wird aus (7)

$$\ddot{\Phi} = -\mathfrak{D} \Phi \quad (10).$$

Macht man für φ_k den bei stehenden Schwingungen üblichen Ansatz

$$\varphi_k = A_k \sin \tilde{\alpha} t$$

mit der Kreisfrequenz $\tilde{\alpha}$, so wird

$$\ddot{\varphi}_k = -\tilde{\alpha}^2 \varphi_k$$

und

$$\ddot{\Phi} = -\tilde{\alpha}^2 \Phi \quad (11).$$

Setzt man noch $\tilde{\alpha}^2 = \lambda$, so wird aus (10) und (11)

$$\mathfrak{D} \Phi = \lambda \Phi$$

oder

$$(\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{D}) \Phi = 0.$$

Die Eigenfrequenzquadrate λ unserer Schwingungen sind also identisch mit den Eigenwerten der dynamischen Matrix \mathfrak{D} . Statt der unsymmetrischen Matrix \mathfrak{D} kann man auch die symmetrische Matrix

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} c_1 + c'_1 & -\sqrt{c'_1 c_2} & & \\ -\sqrt{c'_1 c_2} & c_2 + c'_2 & -\sqrt{c'_2 c_3} & \\ & & & \\ & & & -\sqrt{c'_{n-1} c_n} & c_n + c'_n \end{pmatrix}$$

nehmen, die aus \mathfrak{D} durch die Ähnlichkeitstransformation $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}^{-1} \mathfrak{D} \mathfrak{P}$ mit der nicht-singulären Transformationsmatrix

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{l_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{l_n} \\ & & & c_n \end{pmatrix}$$

hervorgeht. In der dynamischen Matrix \mathfrak{D} oder ersatzweise in der symmetrischen Matrix \mathfrak{S} treten positive und negative Elemente auf. Für die praktische Rechnung ist es bequemer, wenn man nicht auf die Vorzeichen zu achten braucht. Wir ersetzen deshalb \mathfrak{D} bzw. \mathfrak{S} durch die ähnliche Matrix

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} c_1 + c'_1 & c_2 & & \\ c'_1 & c_2 + c'_2 & c_3 & \\ & & \ddots & \\ & & & -c'_{n-1} & c_n + c'_n \end{pmatrix} \text{ bzw. } \mathfrak{S} = \begin{pmatrix} c_1 + c'_1 + \sqrt{c'_1 c_2} & & & \\ +\sqrt{c'_1 c_2} & c_2 + c'_2 + \sqrt{c'_2 c_3} & & \\ & & \ddots & \\ & & & +\sqrt{c'_{n-1} c_n} & c_n + c'_n \end{pmatrix} \quad (12),$$

die aus \mathfrak{D} bzw. \mathfrak{S} vermöge der Ähnlichkeitstransformation mit der Matrix

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & +1 & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^n \end{pmatrix}$$

entsteht und keine negativen Elemente mehr enthält. Die Matrix \mathfrak{S} bzw. \mathfrak{S} , deren Eigenwerte λ_i die Eigenfrequenzen $\tilde{\omega}_i$ liefern, nennen wir die „Frequenzmatrix“, ihre charakteristische Funktion

$$f_n(\lambda) = |\lambda \mathfrak{S} - \mathfrak{S}| \dots \dots \dots (13)$$

die „Frequenzfunktion“ des Systems, dessen freie Torsionsschwingungen untersucht werden sollen.

3. Die homogene Maschine

Unter einer homogenen Maschine versteht man eine Maschine mit gleichen Drehmassen Θ_k , gleichen Wellenstücken von der Länge l_k und gleichen Drehsteifigkeiten C_k . Es ist also $c_k = c'_k = c$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Die Frequenzmatrix der homogenen Maschine mit $n+1$ Drehmassen ist nach (12)

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 2c & c & & \\ c & 2c & c & \\ & & \ddots & \\ & & & c & 2c \end{pmatrix}_n$$

Die Frequenzfunktion ist nach (13)

$$f_n(\lambda) = |\lambda \mathfrak{S} - \mathfrak{S}|.$$

Führt man statt λ die reduzierte Größe $\zeta = \frac{\lambda}{c}$ ein, so entsteht die reduzierte Frequenzfunktion

$$\varphi_n(\zeta) = \frac{f_n(\lambda)}{c} = \begin{vmatrix} \zeta - 2 & -1 & & \\ -1 & \zeta - 2 & -1 & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 & \zeta - 2 \end{vmatrix}_n$$

Diese spezielle Determinante ist eine Kontinuante. Die n -reihige Kontinuante $\varphi_n(\zeta)$ läßt sich durch die $(2n+1)$ -reihige Kontinuante

$$\varphi_n(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \begin{vmatrix} \sqrt{\zeta} & 1 & & \\ 1 & & \sqrt{\zeta} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \sqrt{\zeta} \end{vmatrix}_{2n+1}$$

ersetzen⁶⁾, die sich ihrerseits als Tschebyscheffsches Polynom zweiter Art in der Form

$$\varphi_n(\zeta) = \frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin 2\tau} \dots \dots \dots (14)$$

darstellen läßt⁶⁾, wenn man $\sqrt{\zeta} = \cos \tau$ setzt. Die Nullstellen $\zeta_v^{(n)}$ ($v = 1, 2, \dots, n$) von $\varphi_n(\zeta)$ ergeben sich aus den Nullstellen des Tschebyscheffschen Polynoms zu

$$\zeta_v^{(n)} = 4 \cos^2 \left(1 - \frac{v}{n+1} \right) \frac{\pi}{2} \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

und damit die Eigenfrequenzen $\tilde{\alpha}_v^{(n)}$ der homogenen Maschine zu

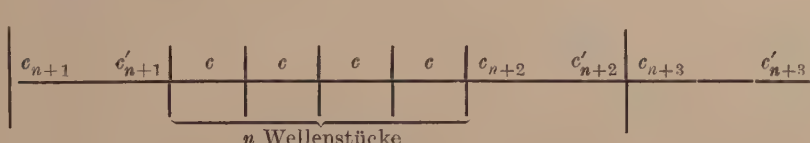
$$\tilde{\alpha}_v^{(n)} = 2 \sqrt{e} \cos \left(1 - \frac{v}{n+1} \right) \frac{\pi}{2} \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Dieses Ergebnis ist bekannt.

4. Die Maschine mit homogenem Hauptteil und einzelnen Zusatzdrehmassen

Wenn zu den n gleichen Wellenstücken mit $n+1$ Zylindern einer homogenen Maschine weitere Drehmassen, z. B. Schwungrad, Dynamorotor, Kupplung usw. hinzutreten, spricht man von einem Maschinenaggregat mit homogenem Hauptteil und einzelnen Zusatzdrehmassen.

Wir betrachten beispielsweise ein solches Maschinenaggregat mit n gleichen Wellenstücken (mit $n+1$ Zylindern), einer zusätzlichen Drehmasse links davon und zwei zusätzlichen Drehmassen rechts davon.



Die Frequenzmatrix dieses Systems ist

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} c_{n+1} + c'_{n+1} & & & & & & & & & & \\ & c'_{n+1} & & & & & & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 2c & c \\ c & \dots & c \\ & & c & 2c \end{matrix}} & & & & & & & & \\ & & & & c_{n+2} & & & & & & \\ & & & & & c_{n+2} + c'_{n+2} & & c_{n+3} & & & \\ & & & & & c'_{n+2} & & c_{n+3} + c'_{n+3} & & & \end{pmatrix}.$$

die Frequenzfunktion ist $f_{n+3}(\lambda) = |\lambda \mathfrak{G} - \mathfrak{G}|$, die reduzierte Frequenzfunktion

$$\bar{\varphi}_{n+3}(\zeta) = \frac{f_{n+3}(\lambda)}{c^{n+3}} = \begin{vmatrix} \zeta - (\gamma_1 + \gamma'_1) & -1 & & & & & & & & & \\ -\gamma'_1 & \zeta - 2 & -1 & & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & -1 & \zeta - 2 & -\gamma_2 & & \\ & & & & & & -1 & \zeta - (\gamma_2 + \gamma'_2) & -\gamma_3 & & \\ & & & & & & & -\gamma'_2 & \zeta - (\gamma_3 + \gamma'_3) & & \end{vmatrix} \quad (15)$$

mit den Abkürzungen

$$\zeta = \frac{\lambda}{c}; \quad \gamma_i = \frac{c_{n+i}}{c}; \quad \gamma'_i = \frac{c'_{n+i}}{c} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Da man die Eigenfrequenzen einer homogenen Maschine kennt, wird man bestrebt sein, möglichst viel von dieser Kenntnis zu verwerten, wenn es darum geht, die Eigenfrequenzen einer teilhomogenen Maschine zu bestimmen. R. Grammel⁷⁾ hat die Frequenzfunktionen $\varphi_n(\zeta)$ für homogene Maschinen tabuliert und die reduzierten Frequenzfunktionen $\bar{\varphi}_{n+p}(\zeta)$ für teilhomogene Maschinen mit p Zusatzdrehmassen mit Hilfe von $\varphi_n(\zeta)$ und $\varphi_{n-1}(\zeta)$ für homogene Maschinen

⁶⁾ A. Vogel: Der Sättigungswert des Kurzschlußstroms in einem Netz mit beliebig vielen Kraftwerken. Z. angew. Math. Mech. Bd. 28 (1948), S. 218.

⁷⁾ R. Grammel: a. a. O., Fußnote ³⁾ und R. Grammel: Die Berechnung der Drehschwingungen von Kurbelwellen mittels der Frequenzfunktionentafel. Ingenieur-Arch. Bd. 3 (1932), S. 277.

dargestellt. Der Zusammenhang zwischen $\varphi_{n+p}(\zeta)$, $\varphi_n(\zeta)$ und $\varphi_{n-1}(\zeta)$ ergibt sich sofort aus einer bekannten Eigenschaft von Kontinuanten⁸⁾:

$$\begin{vmatrix} m_1 & l_1 \\ n_1 & \\ & \ddots \\ & l_{i-1} \\ n_{i-1} & m_i \\ & l_i \\ & n_i \\ & m_{i+1} & l_{i+1} \\ & n_{i+1} & \\ & & \ddots \\ & & l_{r-1} \\ & n_{r-1} & m_r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m_1 & l_1 \\ n_1 & \\ & \ddots \\ & l_{i-1} \\ n_{i-1} & m_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{i+1} & l_{i+1} \\ n_{i+1} & \\ & \ddots \\ & l_{r-1} \\ n_{r-1} & m_r \end{vmatrix} - l_i n_i \begin{vmatrix} m_1 & l_1 \\ n_1 & \\ & \ddots \\ & l_{i-2} \\ n_{i-2} & m_{i-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{i+2} & l_{i+2} \\ n_{i+2} & \\ & \ddots \\ & l_{r-1} \\ n_{r-1} & m_r \end{vmatrix}$$

Nach diesem Satz wird die Frequenzfunktion (15) unserer teilhomogenen Maschine

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi}_{n+3}(\zeta) &= \left\{ \zeta - (\gamma_1 + \gamma'_1) \cdot \left| \begin{vmatrix} \zeta - (\gamma_2 + \gamma'_2) & -\gamma_3 \\ -\gamma'_2 & \zeta - (\gamma_3 + \gamma'_3) \end{vmatrix} - \gamma'_1 \gamma_2 [\zeta - (\gamma_3 + \gamma'_3)] \right\} \varphi_n(\zeta) \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \gamma'_1 \cdot \left| \begin{vmatrix} \zeta - (\gamma_2 + \gamma'_2) & -\gamma_3 \\ -\gamma'_2 & \zeta - (\gamma_3 + \gamma'_3) \end{vmatrix} + \gamma_2 [\zeta - (\gamma_1 + \gamma'_1)] [\zeta - (\gamma_3 + \gamma'_3)] - \gamma'_1 \gamma_2 (\zeta - 2) [\zeta - (\gamma_3 + \gamma'_3)] \right\} \varphi_{n-1}(\zeta) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left\{ \gamma'_1 \gamma_2 (\zeta - 2) [\zeta - (\gamma_3 + \gamma'_3)] \right\} \varphi_{n-2}(\zeta) \right\} \right.
 \end{aligned}$$

Da sich die Funktionen $\varphi_n(\zeta)$ und $\varphi_{n-1}(\zeta)$ nach (14) als Tschebyscheffsche Polynome explizit darstellen lassen, hat man jetzt auch für $\bar{\varphi}_{n+3}(\zeta)$ eine explizite Darstellung in Abhängigkeit von ζ allein.

Die gesuchten reduzierten Eigenwerte ζ_v als Nullstellen der reduzierten Frequenzfunktion $\bar{\varphi}_{n+3}(\zeta)$ genügen einer transzendenten Gleichung von der Form $f(\zeta) \varphi_n(\zeta) = g(\zeta) \varphi_{n-1}(\zeta)$. Daraus ergeben sich unter Verwendung der Tafeln für $\varphi_n(\zeta)$ die Nullstellen selbst dadurch, daß man die Abszissen der Schnittpunkte der beiden Kurven $y_1 = f(\zeta) \varphi_n(\zeta)$ und $y_2 = g(\zeta) \varphi_{n-1}(\zeta)$ bestimmt.

Wenn nun zu den $n+1$ gleichartigen Drehmassen des homogenen Hauptteils einer Maschine noch zahlreiche Zusatzdrehmassen hinzutreten, leidet natürlich die Übersichtlichkeit des sonst sehr bequemen Verfahrens der Frequenzfunktionen. Man kann dann ein automatisch arbeitendes Matrizenverfahren anwenden, das die Eigenfrequenzen numerisch zu bestimmen ermöglicht. In der nächsten Nummer wird die Berechnung der Eigenfrequenzen nach einem solchen Verfahren für eine inhomogene Maschine durchgeführt.

5. Die inhomogene Maschine

Wenn man die Eigenwerte λ_i der dynamischen Matrix \mathfrak{D} oder der dazu ähnlichen Matrizen \mathfrak{S} bzw. \mathfrak{C} oder \mathfrak{B} kennt, berechnen sich die gesuchten Eigenfrequenzen der Maschine aus

$$\tilde{\omega}_i = \sqrt{\lambda_i}.$$

Die Berechnung der Eigenwerte λ_i kann nach den früher beschriebenen Iterationsverfahren⁹⁾ erfolgen. Man weiß, daß alle Eigenfrequenzen reell, positiv und verschieden sind¹⁰⁾. Die dynamische Matrix \mathfrak{D} oder die Frequenzmatrix \mathfrak{C} weist also genau die Eigenschaften auf, die ein glattes Funktionieren der Iterationsverfahren garantieren. Es ist nicht zu befürchten, daß Mehrfachwurzeln, komplexe Wurzeln oder zwei reelle Wurzeln mit gleichem absolutem Betrag auftreten, die eine Modifikation der Iterationsverfahren erforderlich machen würden.

Wenn es nur auf die Bestimmung der Eigenfrequenzen ankommt, nicht auf die Schwingungsform, verwendet man zweckmäßig die Matrix \mathfrak{C} mit lauter positiven Elementen bzw. die dazu ähnliche symmetrische Matrix \mathfrak{B} . Man braucht dann bei der Rechnung gar nicht auf die Vorzeichen zu achten. Möchte man aber außer der Eigenfrequenz auch noch die Schwingungsform kennen, verwendet man zweckmäßig die dynamische Matrix \mathfrak{D} bzw. ihre symmetrische Form \mathfrak{S} .

⁸⁾ J. J. Sylvester: On a fundamental rule in the algorithm of continued fractions. Phil. Mag. Ser. (4), Bd. 6 (1853), S. 297.

⁹⁾ A. Vogel: a. a. O. Fußnote 2).

¹⁰⁾ Über diese und weitere Eigenschaften der Eigenfrequenzen siehe R. Grammel: Über Schwingungsketten I. Ingenieur-Arch. Bd. 14 (1943), S. 213.

In allen Fällen erhält man durch die beschriebenen Iterationsverfahren zunächst den größten Eigenwert λ_1 , der praktisch allerdings am wenigsten interessiert. Zum kleinsten Eigenwert λ_n könnte man dadurch gelangen, daß man die reziproke Matrix zugrunde legt. Dieses Verfahren ist jedoch nicht zu empfehlen, weil erstens die Umkehrung einer Matrix von hoher Ordnung recht umständlich und zweitens die reziproke Matrix eine Vollmatrix ist, also nicht mehr die für das Iterationsverfahren recht günstige Struktur der Frequenzmatrix aufweist, die eine Dreiermatrix ist, wodurch die Rechenarbeit für jeden Iterationsschritt erheblich erleichtert wird. Wir berechnen deshalb lieber erst den größten Eigenwert λ_1 von \mathfrak{E} und dann nacheinander die größten Eigenwerte $\varrho_n, \varrho_{n-1}, \dots$ der Matrix $\mathfrak{H} = (\lambda_1 \mathfrak{E} - \mathfrak{E})$. Die kleinsten Eigenwerte von \mathfrak{E} sind dann

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda_1 - \varrho_n \\ \lambda_{n-1} &= \lambda_1 - \varrho_{n-1} \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}$$

Beispiel: Es sollen die Drehschwingungszahlen der durch die Figur beschriebenen Maschine ermittelt werden.

C_k	$1,5 \cdot 10^{10}$	$1,2 \cdot 10^{10}$	$0,6 \cdot 10^{10}$	$0,3 \cdot 10^{10}$	
l_k	50	30	50	20	
Θ_k	120	40	20	30	10

In die Figur sind die Zahlenwerte für die fünf Drehmassen Θ_k [cm kg sec²], die Längen l_k [cm] und die Drehsteifigkeiten C_k [cm² kg] eingetragen. Damit können die Wellenkoeffizienten der Maschine berechnet werden. Nach (9) ist

$$\begin{aligned}c_1 &= 0,25 \cdot 10^7; & c'_1 &= 0,75 \cdot 10^7; \\ c_2 &= 1 \cdot 10^7; & c'_2 &= 2 \cdot 10^7; \\ c_3 &= 0,6 \cdot 10^7; & c'_3 &= 0,4 \cdot 10^7; \\ c_4 &= 0,5 \cdot 10^7; & c'_4 &= 1,5 \cdot 10^7.\end{aligned}$$

Die Frequenzmatrix \mathfrak{E} ist nach (12) aufzustellen:

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0,75 & 3 & 0,6 & \\ & 2 & 1 & 0,5 \\ & & 0,4 & 2 \end{pmatrix} \cdot 10^7.$$

Die Frequenzfunktion ist $f_4(\lambda) = |\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{E}|$. Um dimensionslose Elemente zu erhalten, dividieren wir \mathfrak{E} durch $c_1 + c'_1 = 1 \cdot 10^7$ und bekommen so die reduzierte Frequenzmatrix

$$F = \frac{\mathfrak{E}}{10^7} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0,75 & 3 & 0,6 & \\ & 2 & 1 & 0,5 \\ & & 0,4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder die symmetrische Matrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0,866\,025 & & \\ 0,866\,025 & 3 & 1,095\,445 & \\ & 1,095\,445 & 1 & 0,447\,214 \\ & & 0,447\,214 & 2 \end{pmatrix}$$

und dazu die reduzierte Frequenzfunktion $F_4(\zeta) = |\zeta \mathfrak{E} - Z|$ mit $\zeta = 10^{-7} \lambda$. Die Nullstellen ζ_k von $F_4(\zeta)$ sind die Eigenwerte von Z . Mit Hilfe der ζ_k ergeben sich die gesuchten Eigenfrequenzen der Maschine zu

$$\tilde{\alpha}_k = \sqrt{10^7 \zeta_k} \quad (k = 1, 2, 3, 4) \dots \dots \dots (16).$$

Man bestimmt zunächst die Maximalwurzel ζ_1 von Z und dann die beiden größten Eigenwerte ϱ_4 und ϱ_3 von $P = (\zeta_1 \mathfrak{E} - Z)$. Die vollständige Rechnung ist in der mehrfach zitierten Arbeit¹¹⁾ für die oben vorliegende Matrix Z durchgeführt worden. Dort ergab sich $\zeta_1 = 3,732\,891$; $\varrho_4 = 3,508\,773$; $\varrho_3 = 2,796\,801$. Damit wird

$$\begin{aligned}\zeta_4 &= \zeta_1 - \varrho_4 = 0,224\,118 \\ \zeta_3 &= \zeta_1 - \varrho_3 = 0,936\,090.\end{aligned}$$

Wegen $\sum_{k=1}^4 \zeta_k = 7$ muß schließlich der noch fehlende Eigenwert $\zeta_2 = 2,106\,901$ sein. Die direkte Berechnung dieses zweitgrößten Eigenwertes ergab den Wert 2,106 900.

Nach (16) sind die gesuchten Eigenfrequenzen der Maschine

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_4 &= 1497 \text{ sec}^{-1}; & \tilde{\alpha}_2 &= 4590 \text{ sec}^{-1} \\ \tilde{\alpha}_3 &= 3060 \text{ sec}^{-1}; & \tilde{\alpha}_1 &= 6110 \text{ sec}^{-1}.\end{aligned}$$

¹¹⁾ A. Vogel: a. a. O. Fußnote 2).

Berechnung an den Rändern belasteter, allgemeiner Schalen

Von W. Zerna in Hannover

Nach einer kurzen Zusammenfassung der Ergebnisse der allgemeinen Theorie dünner elastischer Schalen in der von Green und Zerna entwickelten Form wird der Fall der an den Rändern belasteten, beliebigen Schale behandelt. Das Problem wird auf eine einzige komplexe Differentialgleichung vierter Ordnung zurückgeführt. Der Realteil der Lösungsfunktion liefert eine mit den Normalverschiebungen zusammenhängende Größe, der Imaginärteil eine Spannungsfunktion. Mittels dieser beiden Größen lassen sich die übrigen Verschiebungskomponenten, sowie die Längskräfte, Querkkräfte und Momente der Schale leicht berechnen.

After a brief summary concerning the results of the general theory of thin elastic shells, as it has been developed by Green and Zerna, the author discusses the case of the shell of arbitrary shape that is loaded at its boundary. The problem is reduced to a single complex differential equation of the fourth order. The real part of the solution is connected with the normal displacement, the imaginary part with a stress function. By aid of these two quantities, the other components of the displacements as well as the longitudinal and transversal forces and the moments of the shell can be easily computed.

Après avoir retracé les résultats de la théorie générale des nappes minces élastiques, qui a été développée par Green et Zerna, l'auteur traite le cas de nappes d'une forme arbitraire et qui sont chargées au bord seulement. Le problème est réduit à une seule équation différentielle complexe de quatrième ordre. La part réelle de la solution fournit d'une grandeur, qui est en connexion avec les déplacements normaux, la part imaginaire d'une fonction de tension. A l'aide de ces deux grandeurs on calcule les autres composantes du déplacement, les forces longitudinales et transversales et les moments de la nappe.

После краткого описания результатов теории тонких упругих оболочек, разработанной Гринном и Церна, исследуется загруженная по контуру оболочка любой формы. Эта задача сводится к одному комплексному дифференциальному уравнению четвертого порядка. Действительная часть решения этого уравнения дает величину, связанную с нормальной компонентой смещения, зная часть — функцию напряжения. При помощи этих двух величин могут быть легко вычислены другие компоненты смещения, и также продольные и поперечные силы и изгибающие моменты оболочки.

1. Einleitung

Die Berechnung von elastischen Schalen läßt sich in den meisten praktischen Anwendungsfällen in zwei wesentlichen Schritten durchführen. Zunächst wird der Membranspannungszustand ermittelt, der im allgemeinen jedoch nicht die vorgegebenen Bedingungen an den Rändern befriedigt. Die von den Rändern ausgehenden Störungen des Membranspannungszustandes werden dann durch die Biegetheorie der nur durch Randkräfte bzw. Randmomente belasteten Schale erfaßt. Während sich der Membranspannungszustand in vielen Fällen recht einfach bestimmen läßt, bereitet die Ermittlung der Biegespannungen nach der üblichen Theorie¹⁾ fast stets erhebliche Schwierigkeiten. Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, einen einfacheren, allgemeinen Weg zur Berechnung der an den Rändern belasteten, beliebigen Schalen aufzuzeigen. Den Ausgangspunkt dazu bildet die von Green und Zerna²⁾ aufgestellte Theorie dünner elastischer Schalen, die eine systematische erste Approximation des Schalenproblems darstellt, und deren Ergebnisse zunächst dargelegt werden sollen.

Es werden völlig allgemeine Koordinaten zugrunde gelegt und für die Herleitungen die Vektor- und Tensorrechnung in der Schreibweise des Ricci-Kalküls benutzt.

Demgemäß werde verabredet, daß griechische Buchstaben als Indizes die Werte 1, 2, 3 und lateinische Buchstaben die Werte 1, 2 annehmen. Sofern nicht ausdrücklich anders vermerkt, gilt die übliche Summationsregel, daß über doppelt auftretende gleiche Indizes zu summieren ist. Partielle Differentiation soll durch ein Komma, kovariante Differentiation einer Tensorgröße durch einen senkrechten Strich angezeigt werden. Es ist beispielsweise

$$a_{\alpha, \beta} = \frac{\partial a_{\alpha}}{\partial \vartheta_{\beta}}, \quad a_{\alpha|\beta} = a_{\alpha, \beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} a_{\gamma}, \quad a_{\alpha\beta|\gamma} = a_{\alpha\beta, \gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} a_{\lambda\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda} a_{\alpha\lambda},$$

¹⁾ Die übliche Schalenbiegetheorie baut auf den grundlegenden Annahmen auf, daß die Normalen zur unverformten Mittelfläche auch Normalen zur verformten Mittelfläche, und daß die Spannungskomponenten normal zur Mittelfläche vernachlässigbar sind. Mit diesen Annahmen wurden allgemeine Schalenbiegetheorien, die völlig allgemeine Koordinaten verwenden, entwickelt von A. L. Goldenweiser: Akad. Nauk. S. S. S. R. Prikl. Mat. Mek. 8 (1945) S. 3; J. N. Rabotnov: C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.) 47 (1945) S. 87; W. Zerna: Ingenieur-Arch. 17 (1949) S. 17; H. Neuber: Z. angew. Math. Mech. 29 (1949) S. 98 und 142.

In der letztgenannten Arbeit von Neuber wird eine abweichende Darstellung benutzt. Es werden zwar auch noch die oben erwähnten grundlegenden Annahmen verwendet, aber einige Besonderheiten eingeführt. So werden vor allem die Grundgleichungen nicht durch die üblichen Schalenschnittkräfte und -momente, sondern in anderer Weise ausgedrückt. Der dort eingeschlagene Weg deckt sich teilweise mit einer von W. Z. Chien: Quart. appl. Math. 1 und 2 (1944) S. 297, 43, 120 gegebenen Darstellung, die allerdings wesentlich allgemeiner ist, da dort keine der grundlegenden Annahmen vorausgesetzt werden. Doch wie A. E. Green und W. Zerna: Quart. J. Mech. appl. Math. (im Druck) ausgeführt haben, scheint diese Art der Behandlung des Problems keinerlei Vorteile für praktische Anwendungen zu bringen, sondern gibt darüber hinaus zu einigen Zweifeln Anlaß.

²⁾ A. E. Green und W. Zerna: Quart. J. Mech. appl. Math. (im Druck).

worin $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ die Christoffelschen Dreizeigersymbole zweiter Art und ϑ_{α} unabhängige Parameter sind.

Auch die Kronecker Deltas haben die übliche Bedeutung:

$$\delta_k^i = 1 \ (i = k), \quad \delta_k^i = 0 \ (i \neq k).$$

2. Allgemeine Schalentheorie

Die Punkte der unverformten Schale mögen durch allgemeine krummlinige Koordinaten x_{α} beschrieben werden. Die Fläche, die durch $x_3 = 0$ bestimmt ist, heißt Mittelfläche; x_3 ist der Abstand eines Punktes von der Mittelfläche und wenn t die Dicke der Schale angibt, so ist

$$-\frac{t}{2} \leq x_3 \leq +\frac{t}{2} \dots \dots \dots (2.1).$$

Die Schalenlaibungen werden durch die Gleichungen $x_3 = \pm \frac{t}{2}$ bestimmt. Die Parameter x_i stellen irgendein allgemeines Koordinatensystem auf der Mittelfläche dar.

Es werden nun dimensionslose Koordinaten eingeführt, indem gesetzt wird

$$\vartheta_i = \frac{x_i}{L_i}, \quad \vartheta_3 = \frac{x_3}{t} \quad (\text{nicht über } i \text{ summieren!}),$$

worin L_i für die Längenabmessungen der Schale charakteristische Konstanten sind, die derart gewählt werden mögen, daß

$$\xi_i \leq \vartheta_i \leq \eta_i,$$

worin das Intervall (ξ_i, η_i) gleich der Einheit ist. Auch ϑ_3 läuft gemäß (2.1) im Intervall Eins.

Der Ortsvektor \mathfrak{R}^* eines Punktes der Schale werde durch

$$\mathfrak{R}^* = \mathbf{r}^* + x_3 \mathbf{e}_3$$

angegeben, worin \mathbf{r}^* der Ortsvektor der Mittelfläche und \mathbf{e}_3 der Einheitsvektor der Normalenrichtung zur Mittelfläche ist. Dimensionslose Vektoren \mathfrak{R} , \mathbf{r} werden nun durch

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}^*}{L}, \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}^*}{L}$$

definiert, worin L eine charakteristische Länge angibt, die unter den L_i und den Krümmungsradien der Mittelfläche die kleinste Größe darstellt. Wird

$$\lambda = \frac{t}{L}$$

gesetzt, so bestimmen sich die Punkte der Schale durch den dimensionslosen Ausdruck

$$\mathfrak{R} = \mathbf{r} + \lambda \vartheta_3 \mathbf{e}_3 \dots \dots \dots (2.2).$$

Von nun ab werden nur noch \mathfrak{R} und \mathbf{r} benutzt, die als reduzierte Ortsvektoren bezeichnet werden mögen. Weiterhin werde angenommen, daß $\lambda = \text{const.}$, obwohl es keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bereiten würde, veränderliches λ zu berücksichtigen.

Der kovariante bzw. kontravariante Maßtensor der reduzierten Mittelfläche werde mit g_{ik} bzw. g^{ik} bezeichnet. Die Koeffizienten der zweiten Grundform seien b_{ik} ; sie bilden die kovarianten Komponenten des Krümmungstensors, dessen gemischte Komponenten b_k^i sich zu

$$b_k^i = g^{ii} b_{ik}$$

errechnen. Die mittlere Krümmung H und das Gaußsche Krümmungsmaß K lassen sich in der Form

$$H = \frac{1}{2} b_r^r, \quad K = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2$$

schreiben. Alle hier angegebenen geometrischen Größen beziehen sich auf die reduzierte Mittelfläche und sind demgemäß dimensionslos.

Für die in (2.2) gegebene Darstellung der Schale ist von A. E. Green und W. Zerna²⁾ eine Schalentheorie entwickelt worden, in der nicht von den üblichen Annahmen¹⁾ ausgegangen wird, sondern die sich auf die Voraussetzung gründet, daß die Dicke der Schale hinreichend klein ist, so daß

$$\lambda \ll 1 \dots \dots \dots (2.3).$$

Eine damit aufgebaute systematische Approximation führt auf die nachstehend angegebenen Ergebnisse.

Wird mit $s^{\alpha\beta}$ der kontravariante Spannungstensor bezeichnet und die Spannungsgröße

$$\sigma^{\alpha k} = (\delta_r^k - \lambda \vartheta_3 b_r^k) s^{\alpha r},$$

sowie der geometrische Ausdruck

$$m = \lambda(1 - 2\lambda \vartheta_3 H + \lambda^2 \vartheta_3^2 K)$$

eingeführt, so lassen sich zweckmäßig folgende Schnittgrößen definieren, die in enger Beziehung zu den physikalischen Längskräften, Momenten und Querkraften stehen.

$$\left. \begin{aligned} N^{ik} &= \int_{-1/2}^{+1/2} m \sigma^{ik} d\vartheta^3, \\ M^{ik} &= \int_{-1/2}^{+1/2} m \vartheta_3 \sigma^{ik} d\vartheta^3, \\ Q^i &= \int_{-1/2}^{+1/2} m s^{3i} d\vartheta^3. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.4)$$

Ferner werden die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} P^\alpha &= \left\{ m s^{3\alpha} \right\}_{-1/2}^{+1/2}, \\ R^\alpha &= \left\{ m \vartheta_3 s^{3\alpha} \right\}_{-1/2}^{+1/2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.5)$$

verwendet, die durch die auf die Schalenlaibungen wirkenden Belastungen bestimmt sind.

Unter Benutzung der Größen (2.4) und (2.5) nehmen die Gleichgewichtsbedingungen am Schalelement folgende Form an

$$\left. \begin{aligned} N^{rk}|_r - \lambda b_r^k Q^r - \lambda b_r^k R^r + P^k &= 0, \\ N^{rl} b_{rl} + \lambda Q^r|_r + \lambda P^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.6),$$

$$M^{rk}|_r - Q^k - \frac{\lambda}{4} b_r^k P^r + R^k = 0 \dots \dots \dots (2.7).$$

Die kovarianten Differentiationen darin bedeuten

$$\left. \begin{aligned} N^{rk}|_r &= N^{rk}_{,r} + \Gamma_{rl}^r N^{rl} + \Gamma_{rl}^r N^{kl}, \\ M^{rk}|_r &= M^{rk}_{,r} + \Gamma_{rl}^r M^{rl} + \Gamma_{rl}^r M^{kl}, \\ Q^r|_r &= Q^r_{,r} + \Gamma_{rl}^r Q^l \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.8),$$

worin die Christoffel-Symbole Γ_{kl}^i mittels der Metrik der Mittelfläche zu berechnen sind.

Die Gleichungen (2.6) und (2.7) stellen das Gleichgewicht der Längskräfte und Momente dar und sind exakt im Sinne der klassischen Elastizitätstheorie. Die Näherung kommt nun erst bei Aufstellung des Elastizitätsgesetzes herein.

Die Verschiebung eines beliebigen Punktes der durch (2.2) gegebenen Schale sei durch die dimensionslosen Vektorkomponenten $v_\alpha = v_\alpha(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ bestimmt, aus denen die folgenden Verschiebungsgrößen gebildet werden.

$$V_l = \int_{-1/2}^{+1/2} v_l d\vartheta^3, \quad W_l = \int_{-1/2}^{+1/2} \vartheta_3 v_l d\vartheta^3, \quad V_3 = \frac{3}{2} \int_{-1/2}^{+1/2} (1 - 4\vartheta_3^2) v_3 d\vartheta^3 \quad (2.9).$$

Es kann vorausgesetzt werden, daß V_l und W_l etwa von der gleichen Größenordnung sind. Dann läßt sich mit (2.3) das Elastizitätsgesetz näherungsweise in die Form bringen

$$N^{ik} - \frac{\lambda^2 \mu}{1 - \mu} g^{ik} \left(R^3 + \frac{1}{12} P^r|_r \right) = D E^{iklr} (V_{r|l} - b_{rl} V_3) \dots \dots \dots (2.10),$$

$$M^{ik} - \frac{\lambda^2 \mu}{10(1 - \mu)} g^{ik} \left(P^3 + \frac{1}{6} R^r|_r \right) = D E^{iklr} W_{r|l} \dots \dots \dots (2.11),$$

$$Q^i - \frac{1}{6} R^i = \frac{5D}{12\lambda^2} (1 - \mu) g^{il} (\lambda V_{3,l} + 12 W_l) \dots \dots \dots (2.12).$$

Darin bedeutet μ die Querkontraktionsziffer und

$$D = \frac{E\lambda}{1 - \mu^2},$$

E = Elastizitätsmodul.

Der Tensor vierter Ordnung E^{iklr} ist gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} E^{iklr} &= \frac{1}{2} (1 - \mu) \left(g^{li} g^{kr} + g^{kl} g^{ir} + \frac{\mu}{1 - \mu} g^{ik} g^{lr} \right) \\ &= \frac{1}{2} [g^{il} g^{kr} + g^{kl} g^{ir} + \mu (\varepsilon^{il} \varepsilon^{kr} + \varepsilon^{kl} \varepsilon^{ir})] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.13)$$

mit

$$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0, \quad \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad g = |g_{ik}| = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{12}.$$

Es gelten die Symmetrieeigenschaften

$$E^{iklr} = E^{kilr} = E^{ikrl} = E^{lrik}.$$

Die Ausdrücke (2.10) bis (2.12) stellen den Zusammenhang dar zwischen den in (2.4) definierten Schnittgrößen und den in (2.9) eingeführten Verschiebungsgrößen. Zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen (2.6) und (2.7) ergeben sie das vollständige System der Gleichungen zur Lösung des Schalenproblems.

3. Schale mit Randbelastungen

Es werde nun der Fall betrachtet, daß die Schale nur an den Rändern durch Kräfte oder Momente beansprucht wird, im übrigen aber unbelastet ist. Wird W_i aus (2.11) mittels (2.12) eliminiert, so ergibt sich mit $P^\alpha = R^\alpha = 0$

$$M^{ik} - \frac{\lambda^2}{5(1 - \mu)} [g^{li} M^{rk}|_{rl} + \mu (g^{ik} M^{rl}|_{rl} - g^{li} M^{li}|_{rl})] = -B E^{iklr} V_{3|rl} \dots (3.1),$$

worin

$$B = \frac{D\lambda}{12} = \frac{E\lambda^2}{12(1 - \mu^2)}$$

gesetzt ist. Der Ausdruck (2.10) lautet jetzt

$$N^{ik} = D E^{iklr} \gamma_{lr} \dots \dots \dots (3.2),$$

wenn

$$\gamma_{lr} = \gamma_{rl} = \frac{1}{2} V_{l|l} + \frac{1}{2} V_{r|l} - b_{rl} V_3 \dots \dots \dots (3.3)$$

bedeutet.

Wird (3.2) nach γ_{ik} aufgelöst, so ergibt sich

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{E\lambda} F_{iklr} N^{lr} \dots \dots \dots (3.4),$$

worin

$$F_{iklr} = \frac{1}{2} [g_{il} g_{kr} + g_{kl} g_{ir} - \mu (\varepsilon_{il} \varepsilon_{kr} + \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ir})] \dots \dots \dots (3.5)$$

mit

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{g}$$

Es werde der Ausdruck

$$A = \varepsilon^{ir} \varepsilon^{lk} \gamma_{ik|rl} + \frac{12}{\lambda} b_{ik} \varepsilon^{ir} \varepsilon^{lk} W_{r|l} \dots \dots \dots (3.6)$$

gebildet. Bei Einführung von (3.3) und Beachtung von (2.12) zeigt sich, daß mit der Genauigkeit der hier benutzten Näherung (3.6) identisch verschwindet und geschrieben werden kann

$$\varepsilon^{ik} \varepsilon^{lr} \gamma_{il|rk} + b_{il} \varepsilon^{ik} \varepsilon^{lr} V_{3|rk} = 0 \dots \dots \dots (3.7).$$

Mit (3.4) wird daraus, wenn berücksichtigt wird, daß die kovariante Ableitung des Maßtensors Null ist:

$$\varepsilon^{ik} \varepsilon^{lr} F_{ilmn} N^{mn}|_{rk} + \lambda E b_{il} \varepsilon^{ik} \varepsilon^{lr} V_{3|rk} = 0 \dots \dots \dots (3.8).$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (3.6), (3.7) lassen sich mit der eingeführten Näherung in die Form bringen

$$N^{lk}|_l = 0, \quad N^{rl} b_{rl} + \lambda M^{rl}|_{rl} = 0 \dots \dots \dots (3.9).$$

Die drei Schnittgrößen N^{ik} sollen nunmehr durch eine skalare Spannungsfunktion Φ und zwei vektorielle Funktionen χ_i ausgedrückt werden. Es wird der Ansatz

$$N^{ik} = \varepsilon^{ir} \varepsilon^{kl} (\Phi|_{rl} + \chi_{r|l}) \dots \dots \dots (3.10)$$

gemacht. Einführung in die erste Gleichung (3.9) bringt nach einigen Zwischenrechnungen

$$(\Gamma_{1i,2}^r - \Gamma_{2i,1}^r + \Gamma_{1i}^m \Gamma_{2m}^r - \Gamma_{12}^m \Gamma_{1m}^r) \Phi_{,r} + \varepsilon^{rn} \varepsilon^{im} \chi_{n|m r} = 0 \quad \dots \quad (3.11),$$

woraus sich schließen läßt, daß $\chi_{n|m}$ die Größenordnung von Φ hat.

Es ist bekannt, daß infolge der Randbelastung die Spannungen in der Schale in der Form von gedämpften Schwingungen verlaufen. Aus der zweiten Gleichung (3.9) kann nun gefolgert werden, daß die betreffenden Funktionen beim Differenzieren um $\lambda^{-1/2}$ mal zunehmen. Dann wird aus (3.10) und (3.1) in konsequenter Durchführung der eingeführten Näherungen

$$N^{ik} = \varepsilon^{ir} \varepsilon^{kl} \Phi_{|rl}, \quad M^{ik} = -B E^{iklr} V_{3|rl} \quad \dots \quad (3.12a, b).$$

Werden die Beziehungen

$$\varepsilon^{ik} \varepsilon^{rl} g_{ir} = g^{kl}$$

berücksichtigt und (3.12a) in (3.8) eingeführt, so ergibt sich

$$g^{li} g^{rk} \Phi_{|iklr} + \lambda E b_{il} \varepsilon^{ir} \varepsilon^{lk} V_{3|rk} = 0 \quad \dots \quad (3.13),$$

womit eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung für die Spannungsfunktion Φ und die Verschiebung V_3 gewonnen ist.

Um nun eine zweite Gleichung zu erhalten, wird (3.12b) in die zweite Gleichung (3.9) eingesetzt. Bei Berücksichtigung der eingeführten Näherungen liefert dies

$$\lambda B g^{il} g^{rk} V_{3|iklr} - b_{il} \varepsilon^{ir} \varepsilon^{lk} \Phi_{|rk} = 0 \quad \dots \quad (3.14).$$

Die beiden Differentialgleichungen (3.13) und (3.14) ermöglichen die Bestimmung von Φ und V_3 . Die N^{ik} folgen dann aus (3.12), die M^{ik} aus (3.12b), die Q^i aus (2.7) und die Verschiebungsgrößen V_i lassen sich aus (3.4) ermitteln.

Diese beiden Gleichungen lassen sich natürlich auch durch eine einzige ersetzen. Um sie zu erhalten, wird zweckmäßig ein Weg beschritten, den E. Reißner³⁾ in einem ähnlichen Fall benutzt hat. Die Gleichung (3.13) wird mit einem konstanten Faktor k multipliziert, (3.14) wird durch λB dividiert, dann werden beide Gleichungen addiert. Es ergibt sich

$$g^{li} g^{rk} (V_{3|iklr} + k \Phi_{|iklr}) + k \lambda E b_{il} \varepsilon^{ir} \varepsilon^{lk} (V_{3|rk} - \lambda^2 B E k \Phi_{|rk}) = 0 \quad \dots \quad (3.15).$$

Der Faktor k soll nun so bestimmt werden, daß $k = -\frac{1}{\lambda^2 B E k}$,

daraus folgt

$$k = iK$$

wenn

$$K = \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{\lambda^2 E}, \quad i = \sqrt{-1} \quad \dots \quad (3.16).$$

Mit Einführung der komplexen Funktion

$$\psi = V_3 + k \Phi = V_3 + iK \Phi \quad \dots \quad (3.17)$$

und

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}$$

geht (3.15) über in

$$g^{li} g^{rk} \psi_{|iklr} + \frac{i}{\lambda^*} b_{il} \varepsilon^{ir} \varepsilon^{lk} \psi_{|rk} = 0 \quad \dots \quad (3.18).$$

Dies ist eine komplexe Differentialgleichung vierter Ordnung, die das hier betrachtete Problem beschreibt. Die kovariante Differentiation braucht dabei mit Rücksicht auf die in der ganzen Theorie enthaltenen Näherung natürlich nur bis einschließlich der zweiten Differentialquotienten entwickelt zu werden. Vernachlässigung von Gliedern der Größenordnung $\sqrt{\lambda}$ ergibt eine weitere Näherung und aus (3.18) wird dann einfach

$$g^{li} g^{rk} \psi_{,iklr} + \frac{i}{\lambda^*} b_{il} \varepsilon^{ir} \varepsilon^{lk} \psi_{,rk} = 0 \quad \dots \quad (3.19).$$

Ist die Funktion ψ gefunden, so liefert gemäß (3.17) ihr Realteil die Verschiebung V_3 und ihr Imaginärteil die Spannungsfunktion Φ .

³⁾ E. Reißner: J. Math. Physics 25 (1946) S. 80 und 179 behandelt den Sonderfall der flachen Kugelschale und gelangt zu entsprechenden Gleichungen.

Die Plattengleichungen für den elastisch-plastischen Zustand¹⁾

Von W. Swida in Karlsruhe

Die Grunddifferentialgleichung zur Untersuchung der Plattenbiegung im elastisch-plastischen Zustand wird aufgestellt. Für einen Sonderfall, in dem die Biegefunktion durch einen Ansatz angegeben werden kann, werden die Spannungsverhältnisse gezeigt.

For the investigation of the bending of plates in the elastic-plastic state, the governing differential equation is stated. In a special case, the bending function is obtainable by way of trial, and the distribution of the tensions is explained.

Pour le problème de la flexion de plaques dans l'état élastique-plastique l'équation différentielle fondamentale est établie. Dans un cas spécial on peut faire une position pour la fonction de flexion et déterminer la distribution des tensions.

Выводится основное дифференциальное уравнение для исследования изгиба пластинки в упруго-пластическом состоянии. Для некоторого частного случая, для которого Функция изгиба может быть выражена формулой, определяется распределение напряжений.

1. Einleitung

Es sollen für eine Platte, die elastisch-plastisch deformiert ist (Bild 1), einige Grundbeziehungen aufgestellt werden. Dabei werden folgende Annahmen zugrundegelegt:

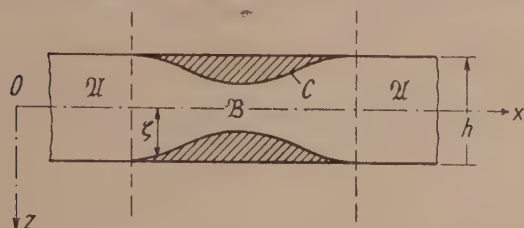


Bild 1

- a) Die Durchbiegung der Platte ist gering gegen die Plattenstärke.
- b) Die Punkte einer zur Mittelebene der Platte senkrechten Geraden liegen nach der Formänderung wieder auf einer Geraden und bilden eine Normale zur Biegefläche. Diese Annahme gilt sowohl für die elastische als auch für die plastische Zone.
- c) Die Platte besteht aus einem elastisch-ideal-plastischen Werkstoff. Dabei sind die Zug- und Druckstreckgrenzen gleich.

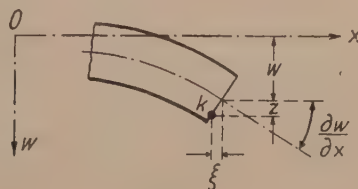


Bild 2

2. Plattengleichungen in rechtwinkligen Koordinaten

Wir betrachten einen beliebigen Punkt K der elastischen oder der plastischen Zone (Bild 2) mit den Koordinaten x, y und z und bezeichnen die Verschiebung dieses Punktes in der Richtung der x - bzw. der y -Achse mit ξ bzw. mit η .

Auf Grund der zweiten Annahme ergeben sich für die Verschiebungskomponenten ξ und η sowie für die Verzerrungskomponenten ϵ_x, ϵ_y und γ_{xy} die gleichen Ausdrücke wie bei der rein elastischen Biegung²⁾ und zwar:

$$\begin{aligned}\xi &= -z \frac{\partial w}{\partial x}, & \eta &= -z \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \epsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \epsilon_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\end{aligned}$$

wobei $w(x, y)$ die Durchbiegung der Platte ist.

¹⁾ Nach einem Vortrag gehalten auf der Tagung für angewandte Mathematik und Mechanik in Darmstadt (April 1950). Zu gleicher Zeit stellt die vorliegende Arbeit einen Abschnitt aus der Habilitationsschrift des Verfassers (Techn. Hochschule Karlsruhe, Juli 1950) dar. Die anderen Teile der Habilitationsschrift „Die elastisch-plastische Biegung des krummen Stabes und der Platte“ sind wie folgt veröffentlicht: 1. Die elastisch-plastische Biegung des krummen Stabes, Ing.-Arch., H. 5/6 (1948). — 2. Die elastisch-plastische Biegung des krummen Stabes unter Berücksichtigung der Materialverfestigung, Ing.-Arch., H. 4 (1949). — 3. Über die Restspannungen bei der elastisch-plastischen Biegung des krummen Stabes, Ing.-Arch., H. 2 (1950). — 4. Die Berechnung von stählernen Bögen unter Berücksichtigung der Tragfähigkeitsreserve im elastisch-plastischen Zustand, Bautechn., H. 10 (1950).

²⁾ Siehe z. B. E. Nádai: Elastische Platten. Berlin 1925, S. 19.

Für die Spannungen in der elastischen Zone gelten daher die bekannten Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

wobei $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ der Schubmodul und μ die Poissonsche Konstante ist. Man ersieht, daß die Spannungen proportional dem Abstand z von der Mittelfläche anwachsen.

Nach der Annahme von Mises-Hencky (Annahme der unveränderlichen Gestaltänderungsarbeit) muß das Fließen in denjenigen Fasern der Platte beginnen, in denen folgende Plastizitätsbedingung erfüllt wird:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 \dots \dots \dots (2).$$

Hierbei ist σ_s die Fließgrenze beim einachsigen Spannungszustand.

Die Spannungen in den Punkten der Grenzfläche C zwischen der elastischen und plastischen Zone der Platte (Bild 1) müssen also diese Bedingung befriedigen.

Substituiert man in die Gl. (2) an Stelle von σ_x , σ_y und τ_{xy} deren Werte (1) und ersetzt man z durch ζ , wobei ζ die Ordinate der Grenzfläche zwischen der elastischen und plastischen Zone ist, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E^2 \zeta^2}{(1-\mu^2)^2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \\ + 3(1-\mu)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \end{aligned} \right\} = \sigma_s^2 \quad (3).$$

Daraus folgt:

$$\zeta = \frac{\sigma_s (1-\mu^2)}{E \sqrt{\alpha^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] + \beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2}} \dots \dots \dots (4),$$

worin

$$\alpha = \sqrt{1-\mu+\mu^2}, \quad \beta = 4\mu-1-\mu^2, \quad \gamma = 3(1-\mu)^2.$$

Aus der letzteren Gleichung kann $\zeta(x, y)$ gefunden werden, wenn die Biegefläche $w(x, y)$ bekannt ist.

Nun wollen wir die Grunddifferentialgleichung zur Ermittlung der Biegefunktion w aufstellen. Bekanntlich lauten die Gleichgewichtsgleichungen für ein Plattenelement (Bild 3)

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \dots \dots \dots (5),$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \dots \dots \dots (7).$$

Dabei bedeuten Q_x und Q_y die Querkräfte, M_x und M_y die Biegemomente, M_{xy} das Torsionsmoment und p die äußere Belastung pro Flächeneinheit.

Eliminiert man die Querkräfte Q_x und Q_y aus (5) mit Hilfe von (6) und (7), so erhält man:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \dots \dots \dots (8)$$

Wie wir schon gesehen haben, wachsen die Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} in der elastischen Zone entlang einer beliebigen Normalen zur Mittelfläche proportional dem Abstand z von dieser Fläche an. In der plastischen Zone dagegen behalten die Spannungen — als konstante Größen — diejenigen Werte bei, die sie an der Zonengrenze erreicht haben und die die Gl. (2) bzw. die

Gl. (3) befriedigen. Deswegen kann die Definitionsgleichung für das Moment M_x folgendermaßen angeschrieben werden (Bild 4):

$$M_x = \int \sigma_x z dz = -2 \int_0^{\zeta} \frac{E z^2}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz - \frac{E \zeta}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \quad (9)$$

$$= -\frac{E \zeta}{1 - \mu^2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

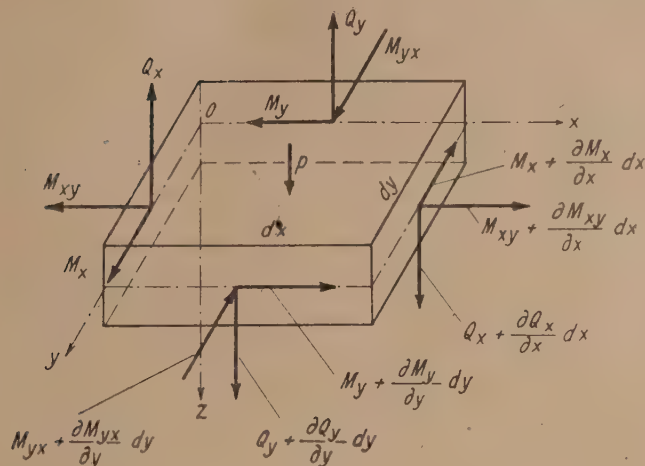


Bild 3

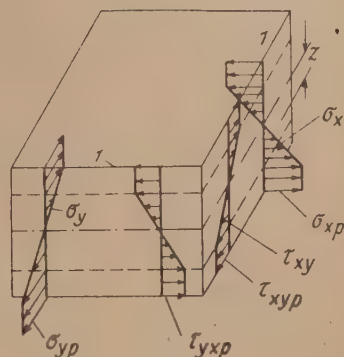


Bild 4

Durch Vertauschen von x und y erhält man:

$$M_y = -\frac{E \zeta}{1 - \mu^2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (10)$$

Für das Torsionsmoment ergibt sich dementsprechend:

$$M_{xy} = \int \tau_{xy} z dz = -2 \int_0^{\zeta} \frac{E z^2}{1 + \mu^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dz - \frac{E \zeta}{1 + \mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \quad (11)$$

$$= -\frac{E \zeta}{1 + \mu} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Man setzt die erhaltenen Werte von M_x , M_y und M_{xy} in die Gl. (8) ein, wobei zu beachten ist, daß nicht nur w , sondern auch ζ mit x und y veränderlich ist.

Infolgedessen muß ζ ebenfalls mit differenziert werden. Dann ergibt sich nach einer bekannten Regel:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -\frac{E}{1 - \mu^2} \left\{ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \left(\frac{h^2 \zeta}{4} - \frac{\zeta^3}{3} \right) + 2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left[\left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - 2 \zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] \right\},$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -\frac{E}{1 - \mu^2} \left\{ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \mu \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right) \left(\frac{h^2 \zeta}{4} - \frac{\zeta^3}{3} \right) + 2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial y} \left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left[\left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - 2 \zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right] \right\},$$

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} = -\frac{E}{1 + \mu} \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\frac{h^2 \zeta}{4} - \frac{\zeta^3}{3} \right) + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left[\left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - 2 \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \right\}.$$

Nach dem Einsetzen dieser Werte in die Gl. (8) erhält man folgende Differentialgleichung:

$$\left. \begin{aligned} & \zeta \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \left(\frac{h^2}{2} - 2\zeta^2 \right) \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] + \left[\left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - 2\zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ & \quad + \left[\left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - 2\zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ & \quad \left. + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - 2\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1-\mu^2}{E} \cdot p(x, y) \right\} \dots (12). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (12) und (4) dienen zur Ermittlung der Biegefläche für den elastisch-plastischen Bereich \mathfrak{B} (Bild 1), sowie der Grenzfläche C zwischen der elastischen und plastischen Zone.

Unter Benützung von (9), (10) und (11) ergeben sich aus (6) und (7) folgende Ausdrücke für die Querkräfte Q_x und Q_y :

$$\begin{aligned} Q_x &= -\frac{E}{1-\mu^2} \left\{ \zeta \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \right\} \\ Q_y &= -\frac{E}{1-\mu^2} \left\{ \zeta \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Für den elastischen Bereich \mathfrak{A} gilt die übliche Gleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \dots (13),$$

wobei

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$$

ist. An der Zonengrenze müssen die Bedingungen des stetigen Überganges für die Spannungen und Formänderungen erfüllt werden.

Die Bedingung (4) kann man durch die Momente ausdrücken. Man sieht aus (9), (10) und (11), daß

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M_x}{D_p} \dots (14);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{D_p} \dots (15);$$

$$(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{M_{xy}}{D_p} \dots (16).$$

Dabei bedeutet

$$D_p = \frac{E \zeta}{1-\mu^2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right) = D_e + \frac{2 S_p E \zeta}{1-\mu^2} \dots (17)$$

die Biegesteifigkeit der Platte im elastisch-plastischen Zustand.

$$D_e = \frac{2}{3} \frac{E \zeta^3}{1-\mu^2}$$

ist die Biegesteifigkeit der elastischen Zone und

$$S_p = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right)$$

das statische Moment der oberen bzw. der unteren plastischen Zone.

Setzt man die Werte (14), (15) und (16) in Gl. (3) ein, so erhält man:

$$\zeta = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{h^2}{\sigma_s} - \frac{3}{\sigma_s} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3 M_{xy}^2}} \dots \dots \dots (18).$$

Nun wollen wir die Bedingung aufstellen, die die Momente befriedigen müssen, damit in der Platte ein elastisch-plastischer Zustand auftritt. Wenn man annimmt, daß die Plastizierung an der Stelle, an der die Momente M_x , M_y und M_{xy} wirken, über die ganze Plattenstärke verbreitet wird, dann wird in (18) $\zeta = 0$ sein und die Momente müssen folgende Bedingung befriedigen:

$$\sqrt{M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3 M_{xy}^2} = \frac{h^2}{4} \cdot \sigma_s = W_s \cdot \sigma_s \dots \dots \dots (19).$$

Hierbei ist $W_p = \frac{h^2}{4}$ das plastische Widerstandsmoment je Längeneinheit. Natürlich hat die Formel (19) nur bedingten Wert, da die hier behandelte Theorie nur für kleine Formänderungen anwendbar ist.

Setzt man in (18) $\zeta = \pm \frac{h}{2}$, so erhält man die Bedingung des Fließanfanges in den Punkten der oberen bzw. der unteren Oberfläche der Platte:

$$\sqrt{M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3 M_{xy}^2} = \frac{h^2}{6} \cdot \sigma_s = W_e \cdot \sigma_s \dots \dots \dots (20),$$

wobei $W_e = \frac{h^2}{6}$ das elastische Widerstandsmoment ist.

Wir bezeichnen im folgenden den Ausdruck:

$$\sqrt{M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3 M_{xy}^2}$$

als reduziertes Moment (M_{red}). Der elastisch-plastische Zustand ist also in irgendeinem Plattenbereich dann vorhanden, wenn in diesem Bereich folgende Bedingung erfüllt wird:

$$W_p \sigma_s > M_{red} > W_e \sigma_s \dots \dots \dots (21).$$

Die Bedingung $M_{red} < W_e \sigma_s$ charakterisiert den elastischen Zustand, und die Bedingung $M_{red} > W_p \sigma_s$ den nach der Plastizierung auftretenden Verfestigungszustand.

Nun wollen wir noch die Formeln für die Spannungen aufstellen. Die Formeln (1) lassen sich mit Hilfe von (14), (15) und (16) folgendermaßen darstellen:

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{\zeta \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right)}.$$

Man führt die Bezeichnung $J_e = \frac{2}{3} \zeta^3$ ein, wobei J_e das Trägheitsmoment der elastischen Zone ist. Dann wird

$$\sigma_x = \frac{M_x \cdot z}{J_e + 2 S_p \zeta} \dots \dots \dots (22)$$

$$\sigma_y = \frac{M_y z}{J_e + 2 S_p \zeta} \dots \dots \dots (23),$$

$$\tau_{xy} = \frac{M_{xy} z}{J_e + 2 S_p \zeta} \dots \dots \dots (24).$$

Setzt man in diesen Gleichungen $z = \pm \zeta$ und benützt man (18), so ergeben sich folgende Ausdrücke für die Spannungen in der plastischen Zone:

$$\sigma_{xp} = \pm \frac{M_x}{\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3}} = \pm \frac{M_x \sigma_s}{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3 M_{xy}^2}} = \pm \frac{M_x \sigma_s}{M_{red}} \dots \dots \dots (25),$$

$$\sigma_{yp} = \pm \frac{M_y \cdot \sigma_s}{M_{red}} \dots \dots \dots (26),$$

$$\tau_{xyp} = \pm \frac{M_{xy} \sigma_s}{M_{red}} \dots \dots \dots (27).$$

3. Einige Sonderfälle

Die Auflösung der Gleichung (12) bietet erhebliche Schwierigkeiten. Für den weiter unten behandelten Fall wird deshalb die Biegefunktion durch einen Ansatz angegeben, damit die Spannungsverhältnisse an Hand eines Zahlenbeispiels gezeigt werden könnten.

a) Reine Biegung

Es wird angenommen, daß die Biegefunktion für den elastischen Zustand eine quadratische Funktion

$$w = c_1 x^2 + 2 c_2 x y + c_3 y^2$$

ist. Dann werden die Momente M_x , M_y und M_{xy} von den Koordinaten x und y unabhängig und Querkräfte sind nicht vorhanden.

Bei der Zunahme der Momente müssen in diesem Falle plastische Formänderungen zu gleicher Zeit in allen Punkten der oberen sowie der unteren Oberfläche auftreten. Die bei dem weiteren Anwachsen der Momente entstehenden plastischen Zonen haben überall dieselbe Stärke, d. h. ζ ist von x und y unabhängig.

Für den elastisch-plastischen Zustand kann die Biegefläche folgendermaßen dargestellt werden:

$$w = c_1(\zeta) x^2 + 2 c_2(\zeta) x y + c_3(\zeta) y^2.$$

Auf Grund von (9), (10) und (11) wird

$$M_x = -\psi(\zeta) [c_1(\zeta) + \mu c_3(\zeta)],$$

$$M_y = -\psi(\zeta) [c_3(\zeta) + \mu c_1(\zeta)],$$

$$M_{xy} = -\psi(\zeta) (1 - \mu) c_2(\zeta),$$

worin

$$\psi(\zeta) = \frac{2 E \zeta}{1 - \mu^2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right)$$

ist. Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$c_2(\zeta) = -\frac{M_{xy}}{(1 - \mu) \psi(\zeta)},$$

$$c_1(\zeta) = -\frac{1}{\psi(\zeta)} \cdot \frac{M_x - \mu M_y}{1 - \mu^2}.$$

$$c_3(\zeta) = -\frac{1}{\psi(\zeta)} \cdot \frac{M_y - \mu M_x}{1 - \mu^2}.$$

Mit diesen Werten wird

$$w = -\frac{1}{2 E \zeta \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right)} [(M_x - \mu M_y) x^2 + 2(1 + \mu) M_{xy} \cdot x y + (M_y - \mu M_x) y^2] \dots (28).$$

Die halbe Höhe ζ der elastischen Zone kann dabei aus (18) ermittelt werden.

b) Biegung nach einer Zylinderfläche

In diesem Falle wird

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0.$$

Dann ergibt sich unter entsprechender Verwendung der früheren Numerierung der Formel:

$$\sigma_x = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \cdot \frac{d^2 w}{d x^2}, \quad \sigma_y = \mu \sigma_x, \quad t_{xy} = 0. \dots (1),$$

$$\zeta = \frac{\sigma_s (1 - \mu^2)}{\alpha E \frac{d^2 w}{d x^2}} \dots (4),$$

$$\frac{d^2 M_x}{d x^2} = -p \quad \dots \quad (8),$$

$$\zeta \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right) \frac{d^4 w}{d x^4} + \left(\frac{h^2}{2} - 2 \zeta^2 \right) \frac{d^3 w}{d x^3} + \frac{d \zeta}{d x} + \left[\left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \frac{d^2 \zeta}{d x^2} - 2 \zeta \left(\frac{d \zeta}{d x} \right)^2 \right] \frac{d^2 w}{d x^2} = \frac{1 - \mu^2}{E} p(x) \quad (12),$$

$$\frac{d^2 w}{d x^2} = - \frac{M_x}{\frac{E \zeta}{1 - \mu^2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right)} = - \frac{M_f}{D \cdot \alpha \cdot \sqrt{3 - \frac{2 M_x}{M_f} \alpha}} \quad \dots \quad (14),$$

$$M_f = \frac{h^2}{6} \sigma_s,$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{3}{4} h^2 - \frac{3 M_x}{\sigma_s} \alpha} \quad \dots \quad (18).$$

$$\begin{aligned} M_{red} &= \alpha M_x \\ W_p \sigma_s &> \alpha M_x > W_e \sigma_s \quad \dots \quad (21), \end{aligned}$$

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{J_e + 2 S_p \zeta} \quad \dots \quad (22),$$

$$\sigma_{xp} = \pm \frac{\sigma_s}{\alpha} \quad \dots \quad (25).$$

Die Gleichungen (12) und (14) sind die Differentialgleichungen der Biegefläche. In der ersten Gleichung wird w durch p und in der zweiten durch M_x ausgedrückt.

4. Beispiel

Eine stählerne Platte mit $h = 1$ cm wird durch die konstanten Biegemomente $M_x = 580$ kg/cm und $M_y = 300$ kg/cm beansprucht (Bild 5). Es wird angenommen, daß $M_{xy} = 0$, $\sigma_s = 2400$ kg/cm², $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm² und $\mu = 0,30$ sind.

Das reduzierte Moment ergibt sich zu

$$M_{red} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} - M_x M_y = 502 \text{ kg/cm}.$$

Man ersieht aus der Bedingung (21), daß in der Platte ein elastisch-plastischer Zustand auftritt. Die Formel (18) liefert:

$$\zeta = 0,350 \text{ cm}.$$

Die Gleichung der Biegefläche (28) wird:

$$w = -(0,00159/\text{cm}) x^2 - (0,00041/\text{cm}) y^2.$$

Sie stellt ein elliptisches Paraboloid dar.

Die Spannungen in der elastischen Zone ergeben sich nach (22) und (23) zu:

$$\sigma_x = \left(7900 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \right) \cdot z; \quad \sigma_s = \left(4080 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \right) \cdot z$$

und in der plastischen Zone nach (25) und (26) zu:

$$\sigma_{xp} = \pm 2770 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{yp} = \pm 1430 \text{ kg/cm}^2.$$

Man sieht, daß die Spannung σ_{xp} die Fließgrenze σ_s wesentlich überschreitet.

Eingegangen vom 1. 11. 1949.

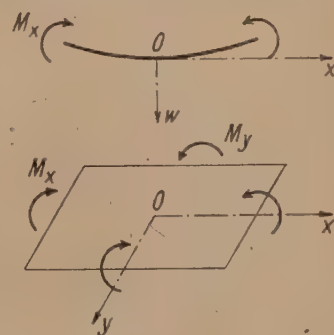


Bild 5

KLEINE MITTEILUNGEN

Über einige unendliche Reihen von Besselschen Funktionen.

Es sollen Summenformeln für einige unendliche Reihen von Besselschen Funktionen mitgeteilt werden, auf die bisher in der Literatur nicht aufmerksam gemacht worden zu sein scheint. Neben den Besselschen Funktionen $J_n(z)$ mit ganzzahligem Index n treten in ihnen die sog. modifizierten Besselschen Funktionen $I_n(z)$ auf, die folgendermaßen definiert sind

$$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz) \dots \dots \dots (1).$$

Die Funktionen J_n lassen sich bekanntlich durch eine erzeugende Funktion darstellen

$$\frac{z}{e^{\frac{z}{2}} (t - t^{-1})} = \sum_n t^n J_n(z) \dots \dots \dots (2).$$

(Alle Summen, bei denen nicht ausdrücklich Grenzen angegeben sind, sollen hier stets von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt werden.) Wegen (1) gewinnt man unter Ersetzung von z durch iz und von it durch τ für die I_n die Darstellung

$$\frac{z}{e^{\frac{z}{2}} (\tau + \tau^{-1})} = \sum_n \tau^n I_n(z) \dots \dots \dots (3).$$

Multipliziert man (2) mit (3), setzt $\tau = t^{-1}$ und ordnet das Produkt der Reihen in geeigneter Weise, so erhält man

$$e^{zt} = \sum_l t^l \sum_n J_n(z) I_{n-l}(z) \dots \dots \dots (4).$$

(Auf die Rechtfertigung der Umformung soll hier nicht eingegangen werden.) Entwickelt man die Exponentialfunktion in eine Reihe nach Potenzen von t

$$e^{zt} = \sum_0 \frac{t^l z^l}{l!} \dots \dots \dots (5)$$

und vergleicht (5) mit (4), so gewinnt man folgende Beziehung

$$1 = \sum_n J_n(z) I_n(z) \dots \dots \dots (6),$$

$$\frac{z^l}{l!} = \sum_n J_n(z) I_{n-l}(z) \quad \text{für } l = 1, 2, 3, \dots \dots (7'),$$

$$0 = \sum_n J_n(z) I_{n+l}(z) = \sum_n (-1)^n J_n(z) I_{n-l}(z) \quad \text{für } l = 1, 2, 3, \dots \dots (7'').$$

Das zweite Gleichheitszeichen in (7'') folgt daraus, daß

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z); \quad I_{-n}(z) = I_n(z) \dots \dots (8).$$

Durch Addieren und Subtrahieren von (7') und (7'') erhält man schließlich

$$\frac{1}{2} \frac{z^l}{l!} = \sum_m J_{2m}(z) I_{2m-l}(z) = \sum_m J_{2m+1}(z) I_{2m+1-l}(z) \quad \text{für } l = 1, 2, 3, \dots \dots (9).$$

Es ist wegen (8) zweckmäßig, nur Indizes ≥ 0 auftreten zu lassen. Man gewinnt so die Summenformeln (unter Fortlassung der Argumente z):

$$J_0 I_0 + 2 \sum_1 J_{2m} I_{2m} = 1 \quad (10a),$$

$$J_0 I_1 + \sum_1 J_{2m} (I_{2m-1} + I_{2m+1}) = \frac{z}{2} \quad (10b'),$$

$$J_1 I_0 + \sum_1 (J_{2m+1} - J_{2m-1}) I_{2m} = \frac{z}{2} \quad (10b''),$$

$$J_0 I_2 + \sum_1 J_{2m} (I_{2m-2} + I_{2m+2}) = \frac{z^2}{4} \quad (10c'),$$

$$J_1 I_1 + \sum_1 (J_{2m+1} I_{2m-1} - J_{2m-1} I_{2m+1}) = \frac{z^2}{4} \quad (10c''),$$

$$J_0 I_3 + J_2 (I_1 + I_5) + \sum_1 J_{2m+2} (I_{2m-1} + I_{2m+5}) = \frac{z^3}{12} \quad (10d'),$$

$$J_1 (I_2 - I_4) + \sum_1 J_{2m+1} (I_{2m-2} - I_{2m+4}) = \frac{z^3}{12} \quad (10d'')$$

usw.

Für den allgemeinen Fall lassen sich nicht einfache, übersichtliche Formeln gewinnen, die nur Indizes ≥ 0 enthalten. Man muß derartige Formeln für jedes einzelne l aus (9) ableiten.

Die angegebenen Formeln lassen sich auch durch einen etwas mühsamen Grenzübergang aus dem Additionstheorem für Zylinderfunktionen gewinnen. Jedoch scheint uns die hier gegebene Ableitung angemessener zu sein.

Die Gl. (10) treten bei der Untersuchung von großen Amplituden in Magnetfeld- und Traveling-Wave-Röhren¹⁾ auf.

Paris, Centre des Recherches de la Compagnie générale de T. S. F.

Hamburg, Institut für Theoretische Physik der Universität.

O. Döhler und G. Lüders.

¹⁾ J. Brossart und O. Döhler: Annales de Radioélectr., im Erscheinen.

Zur Frage, ob alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung einen negativen Realteil haben (Stabilitätsfrage).

Die verschiedenen algebraischen und geometrischen Stabilitätskriterien setzen insbesondere algebraische und funktionentheoretische Kenntnisse voraus, die nicht jedem Ingenieur geläufig sind. Überdies ist der Zusammenhang des Schemas der Anwendung dieser Kriterien mit ihrer Begründung nicht so einfach, daß es möglich wäre, diesen Zusammenhang während ihrer Anwendung gegenwärtig zu haben. Bei dem folgenden einfach zu begründenden Stabilitätskriterium ist der Beitrag, den jeder Schritt der Rechnung zur Beantwortung der Stabilitätsfrage leistet, besonders leicht zu vergegenwärtigen.

Der enge Zusammenhang des Kriteriums mit den Kriterien von J. Schur [1] ist am Ende angegeben.

Wir beschränken uns auf den technisch wichtigsten Fall positiver reeller Koeffizienten und führen in die mit

$$g(p) = c_0 + c_2 p^2 + c_4 p^4 + \dots$$

$$\text{und} \quad h(p) = c_1 p + c_3 p^3 + c_5 p^5 + \dots$$

gebildete Polynomgleichung

$$\Delta(p) = g(p) + h(p) = 0 \dots \dots (1)$$

den positiven, reellen Parameter λ_1 ein, indem wir $h(p)$ mit λ_1 multiplizieren.

Wir erhalten

$$\Delta_{\lambda_1}(p) = g(p) + \lambda_1 h(p) = 0 \dots \dots (2)$$

und behaupten:

$$\text{Hat } \Delta(p) = 0$$

N_1 Wurzeln mit positivem Realteil ($R > 0$)

N_2 Wurzeln mit negativem Realteil ($R < 0$)

N_3 Wurzeln auf der imaginären Achse ($R = 0$),

so hat auch $\Delta_{\lambda_1}(p)$ ebensoviele Wurzeln in jeder der beiden Halbebene und auf der imaginären Achse.

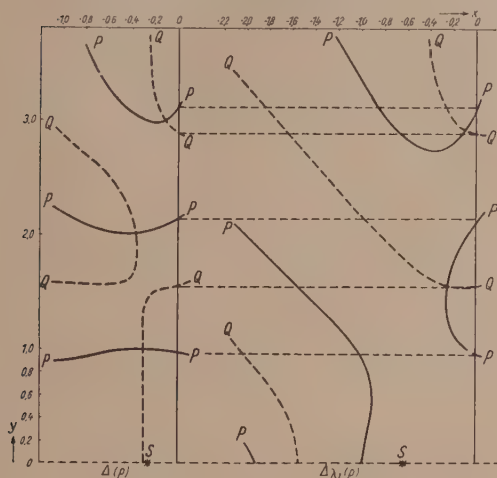
Durch die Einführung von λ_1 kann keine Wurzel die imaginäre Achse verlassen oder überschreiten oder auf die imaginäre Achse rücken. Dies folgt am einfachsten aus der Tatsache, daß die Lage der Schnittpunkte der Wurzelkurven

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 0 \\ Q(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

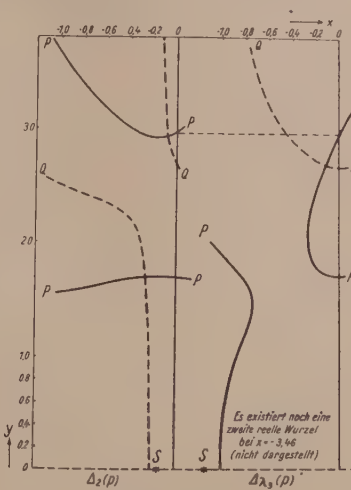
von $\Delta(p) = P(x, y) + iQ(x, y) = 0$, $p = x + iy$ mit der imaginären Achse von $\lambda_1 > 0$ unabhängig ist.

Diese Schnittpunkte y ergeben sich als Wurzeln der Gleichungen (3) für $x = 0$; diese Gl. lauten:

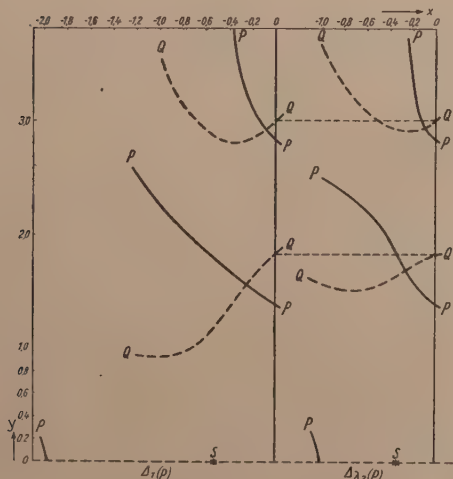
$$\begin{aligned} P_0(y) &= c_0 - c_2 y^2 + c_4 y^4 - \dots = 0 \\ Q_0(y) &= c_1 y - c_3 y^3 + c_5 y^5 - \dots = 0 \end{aligned} \quad (4).$$



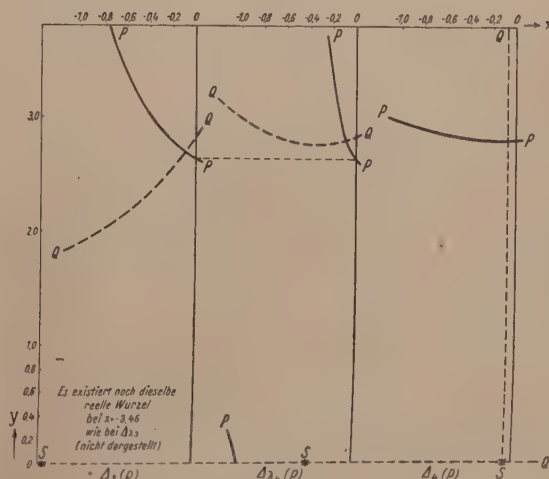
Teil a



Teil c



Teil b



Teil d und e

Die Gleichungen der Wurzelkurven für $\Delta_{\lambda_1}(p)$ unterscheiden sich nur dadurch von denen für $\Delta(p)$, daß $Q_0(y)$ mit λ_1 multipliziert ist. Die Wurzelkurven von $\Delta(p)$ und $\Delta_{\lambda_1}(p)$ schneiden also die imaginäre Achse in denselben Punkten, wie dies in der Darstellung der Wurzelkurven zum 1. Beispiel mehrfach angedeutet ist. N_3 hat also für die Gleichungen (1) und (2) denselben Wert.

Da ferner die Wurzeln von (1) stetige Funktionen der Gleichungskoeffizienten sind, so kann auch kein Realteil einer Wurzel von $\Delta(p)$ infolge der Einführung von λ_1 sein Vorzeichen wechseln. Könnte nämlich eine Wurzel die imaginäre Achse überschreiten, so müßte es auch einen Wert λ_1 geben, für den $R = 0$ würde. Das ist aber nicht möglich, da λ_1 die Schnittpunkte

der Wurzelkurven mit der imaginären Achse unverändert läßt.

Für die Beantwortung der Stabilitätsfrage kann also die Gleichung (1) durch (2) ersetzt werden. Setzt man nun in (2)

$$\lambda_1 = -\frac{g(p_1)}{h(p_1)} = -\frac{c_0 + c_2 p_1^2 + c_4 p_1^4 + \dots}{c_1 p_1 + c_3 p_1^3 + \dots},$$

worin p_1 negativ, reell ist, z. B.

$$p_1 = -1,$$

so wird

$$\Delta_{\lambda_1}(p) = g(p) \cdot h(p_1) - g(p_1) \cdot h(p) = 0 \quad (5).$$

Zu Beispiel 1. Wurzelkurven der zu:

$$\Delta(p) = 8p^6 + 18p^5 + 120p^4 + 187p^3 + 450p^2 + 250p + 322 = 0$$

gehörigen reduzierten Gleichungen $\Delta_p(p) = 0$ und der Gleichungen $\Delta_p(p) = 0$.

S = Wurzelschwerpunkt

Dieser Ausdruck verschwindet für $p = p_1$; er ist also durch $p - p_1$ teilbar, so daß wir die Gleichung

$$\Delta_1(p) = \frac{g(p)h(p_1) - g(p_1)h(p)}{p - p_1} = g_1(p) + h_1(p) = 0 \quad (6)$$

vom Grade $n - 1$ erhalten, die in der negativen Halbebene eine Wurzel weniger hat als die Ausgangsgleichung; ihr haben wir durch die Wahl des Para-

meters λ_1 zunächst die Wurzel p_1 aufgezungen, die wir sodann abgespalten haben.

Weist Gl. (6) einen Vorzeichenwechsel auf, so ist sicher $N_1 \neq 0$, die Stabilitätsfrage also zu verneinen; hat (6) keinen Vorzeichenwechsel, so muß man mit (6) wie mit (1) verfahren, wobei man aber auch eine beliebige andere ($p_1 \neq -1$) negativ reelle Wurzel p_1 abspalten kann. Man erhält so eine Gleichung vom Grade $n-2$ mit den Anzahlen N_3, N_{n-2}, N_1 der Wurzeln. Man hat also zu bilden:

$$l_{\lambda_1}(p) = g_1(p) + \lambda_2 h_1(p) \dots \quad (7)$$

$$\text{mit} \quad \lambda_2 = -\frac{g_1(p_1)}{h_1(p_1)}$$

und aus (7)

$$\Delta_2(p) = \frac{\Delta_1(p)}{p - p_1} = g_2(p) + h_2(p) = 0 \dots \quad (8)$$

Die Vorzeichen von $\Delta_2(p)$ entscheiden über die Notwendigkeit der Bildung von $\Delta_3(p)$.

Dieses Verfahren der Reduktion des Grades der vorgelegten Gleichung setzt man fort, solange in der reduzierten Gleichung kein Vorzeichenwechsel auftritt, längstens bis zur Gl. 2. Grades, die man nach $n-2$ Schritten erreicht. Sind alle reduzierten Gleichungen von Zeichenwechseln frei, so ist $N_1 = 0$; da N_2 durch das Verfahren nicht verändert wird, so findet dann die Folge der Gleichungen $\Delta_p(p)$ mit derjenigen Gleichung ihr Ende, welche nur noch die rein imaginären Wurzeln von $\Delta(p)$ hat, falls $\Delta(p)$ solche Wurzeln besitzt. Im allgemeinen ist es zweckmäßig, für alle Reduktionsschnitte $p_1 = -1$ zu setzen, so daß

$$\lambda = \frac{c_0 + c_2 + c_4 + \dots}{c_1 + c_3 + c_5 + \dots}$$

wird; die notwendigen Divisionen durch $(p+1)$ führt man mit dem Horner'schen Schema aus.

Schur [1] ordnet dem vorgelegten Polynom $\Delta(p)$ vom Grade n ein zweites $\Delta^*(p)$ von demselben Grade zu, dessen Wurzeln in bezug auf die imaginäre Achse Spiegelbilder der Wurzeln von $\Delta(p)$ sind; er benutzt den vom Hermite [2] bereits bei ähnlichen Untersuchungen verwendeten Ausdruck

$$F(p, p_1) = \Delta^*(p_1) \Delta(p) - \Delta^*(p) \Delta(p_1) = 0 \dots \quad (9)$$

für das Reduktionsverfahren; $F(p, p_1)$ ist durch $p - p_1$ teilbar.

Setzt man bei reellen Koeffizienten

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= \alpha g(p) + \beta h(p) \\ \Delta^*(p) &= \alpha_1 g(p) + \beta_1 h(p), \end{aligned}$$

so wird

$$F(p, p_1) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \cdot [g(p)h(p_1) - g(p_1)h(p)]$$

oder

$$F(p, p_1) = h(p_1) \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \cdot \left[g(p) - \frac{g(p_1)}{h(p_1)} h(p) \right].$$

Der Ausdruck (9) stimmt also bis auf einen, belanglosen Faktor mit (2) bzw. mit (5) überein.

1. Beispiel; stabiler Fall.

Vorgelegt sei die Gleichung

$$\Delta(p) = 8p^6 + 13p^5 + 120p^4 + 137p^3 + 450p^2 + 250p + 322 = g(p) + h(p) = 0.$$

Mit $p_1 = -1$ wird

$$\lambda_1 = \frac{322 + 450 + 120 + 8}{250 + 137 + 13} = 2,25$$

und

$$\Delta_1(p) = 8p^6 + 29,25p^5 + 120p^4 + 308,25p^3 + 450p^2 + 562,5p + 322 = 0.$$

Wie auch das Bild der Wurzelkurven zeigt, hat $\Delta_1(p)$ — und ebenfalls $\Delta_2(p), \Delta_3(p)$ und $\Delta_4(p)$ — die erzwungene Wurzel $p_1 = -1$; ein ursprünglich kom-

plexes Wurzelpaar ist durch die Einführung von λ_1 in zwei reelle Wurzeln zerfallen, deren eine (p_1) mit Hilfe des Horner'schen Schemas abgespalten wird.

Das Schema liefert:

$$\begin{array}{r} 8 \quad 29,25 \quad 120 \quad 308,25 \quad 450 \quad 562,5 \quad 322 \\ -1] \quad -8 \quad -21,25 \quad -98,75 \quad -209,5 \quad -240,5 \quad -322 \\ \hline 8 \quad 21,25 \quad 98,75 \quad 209,5 \quad 240,5 \quad 322 \end{array}$$

Die 1. reduzierte Gleichung ist also

$$\Delta_1(p) = 8p^5 + 21,25p^4 + 98,75p^3 + 209,5p^2 + 240,5p + 322 = g_1(p) + h_1(p) = 0.$$

Mit $\lambda_2 = 1,59$

$$\text{wird } \Delta_2(p) = 5896p^5 + 9838,75p^4 + 72778,75p^3 + 96998,65p^2 + 177248,5p + 149086 = 0$$

und

$$\Delta_2(p) = 5896p^4 + 3942,75p^3 + 68836p^2 + 28162,5p + 149086 = g_2(p) + h_2(p) = 0.$$

Mit $\lambda_3 = 6,97$ findet man in derselben Weise

$$\Delta_3(p) = p^3 + 3,662p^2 + 8,013p + 25,286 = g_3(p) + h_3(p) = 0$$

und mit

$$\lambda_4 = 3,212$$

$$\Delta_4(p) = p^2 + 0,140p + 7,873 = g_4(p) + h_4(p) = 0.$$

Da in der Reihe der $\Delta_p(p)$ keine der Gleichungen einen Vorzeichenwechsel aufweist, hat $\Delta(p)$ keine Wurzeln mit $R > 0$; da ferner $\Delta_4(p)$ keine rein imaginären Wurzeln hat, liegt auch der Grenzfall der Stabilität nicht vor. $\Delta(p)$ hat also nur Wurzeln mit $R < 0$.

2. Beispiel; Grenzfall der Stabilität.

$$\Delta(p) = p^7 + 4p^6 + 8p^5 + 12p^4 + 13p^3 + 12p^2 + 6p + 4 = 0$$

führt mit

$$\lambda_1 = \frac{8}{7}, \quad \lambda_2 = \frac{9}{5}, \quad \lambda_3 = \frac{7}{2}$$

zu den reduzierten Gleichungen

$$\Delta_1(p) = 8p^6 + 20p^5 + 44p^4 + 40p^3 + 64p^2 + 20p + 28 = g_1(p) + h_1(p) = 0$$

$$\Delta_2(p) = 40p^5 + 140p^4 + 80p^3 + 280p^2 + 40p + 140 = g_2(p) + h_2(p) = 0$$

$$\Delta_3(p) = 28p^4 + 56p^3 + 28 = g_3(p) + h_3(p) = 0$$

mit dem Doppelwurzelkpaar $p = \pm i$, das auch Wurzelkpaar von $\Delta(p)$ ist.

3. Beispiel; instabiler Fall.

Das von Schur [1] gegebene Beispiel ist

$$\Delta(p) = 8p^5 + 4p^4 + 7p^3 + 5p^2 + p + 1 = 0.$$

Wir erhalten mit $\lambda_1 = \frac{5}{8}$

$$\Delta_1(p) = 40p^5 + 32p^4 + 35p^3 + 40p^2 + 5p + 8 = 0.$$

Das Horner'sche Schema

$$\begin{array}{r} 40 \quad 32 \quad 35 \quad 40 \quad 5 \quad 8 \\ -1] \quad -40 \quad +8 \quad -43 \quad +3 \quad -8 \\ \hline 40 \quad -8 \quad +43 \quad -3 \quad 8 \end{array}$$

liefert in der letzten Zeile die Koeffizienten von $\Delta_1(p)$ mit Zeichenwechsel; es liegt also Instabilität vor.

Schrifttum.

- [1] J. Schur: Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen. Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), S. 307—311.
- [2] Ch. Hermite: Extrait d'une lettre de Mr. Ch. Hermite. Crelles Journal 52, 1854, S. 39—51; gl. auch M. Böcher, Einführung in die höhere Algebra 1910 S. 256 Ziffer 3.

Berlin u. Demern.

Hermann Schmidt.

Das Mehrstellenverfahren bei Plattenaufgaben.

Bei den Randwertaufgaben der Potentialtheorie hat sich unter den verschiedenen Arten von Differenzenverfahren das Mehrstellenverfahren als brauchbar gezeigt. Es liegt daher nahe, es auch bei der Plattengleichung anzuwenden. Das Mehrstellenverfahren ist eine der verschiedenen Verschärfungen des gewöhnlichen Differenzenverfahrens, welche den Vorzug hat, bei Differentialgleichungen einfacher Bauart die Rechenarbeit gegenüber dem gewöhnlichen Differenzenverfahren nur wenig zu erhöhen, während die erhaltenen Resultate Fehler aufweisen, die mit einer höheren Potenz der Maschenweite h gegen Null gehen und daher im allgemeinen wesentlich kleiner sind, als beim gewöhnlichen Differenzenverfahren.

1. Formeln des Mehrstellenverfahrens im quadratischen Gitter für die Plattengleichung (2)

Hier soll nicht das Mehrstellenverfahren allgemein entwickelt¹⁾, sondern nur seine Anwendung auf die Plattengleichung beschrieben werden. Wie bei den anderen Arten von Differenzenverfahren wird ein etwa quadratisches Gitter von der Maschenweite h mit den Gitterpunkten nach Bild 1

$$x_j = x_0 + jh, \quad y_k = y_0 + kh \dots (1)$$

verwendet. Zur Anwendung auf die Plattengleichung

$$\Delta \Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{p}{N} \dots (2)$$

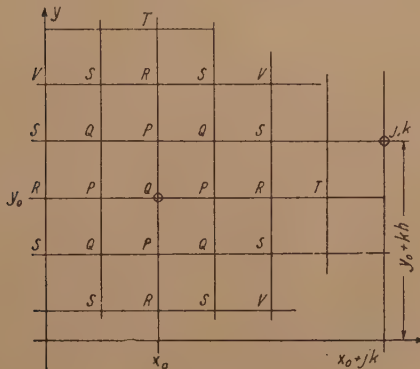


Bild 1

(mit den üblichen Bezeichnungen: Durchbiegung $u(x, y)$ der Mittelebene der als dünn vorausgesetzten homogenen Platte an der Stelle x, y , Belastungsdichte $p(x, y)$ an der Stelle x, y , konstante Plattensteifigkeit N) wird eine Summe gebildet

$$B = \sum_{j,k} (a_{jk} u_{jk} + A_{jk} (\Delta \Delta u)_{jk}) \dots (3)$$

wo die Summe über eine gewisse Anzahl von Gitterpunkten zu erstrecken ist, bei u und $\Delta \Delta u$ die angehängten Indizes j, k die Werte an der Stelle x_j, y_k bezeichnen und die Konstanten a_{jk}, A_{jk} so zu bestimmen sind, daß bei Taylorentwicklung aller Glieder der Summe nach u_{00} und den partiellen Ableitungen an der Stelle x_0, y_0 die Koeffizienten von $\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right)_{0,0}$ bis zu möglichst hohen Werten von α und β verschwinden. Dann soll

$$\sum_{j,k} \left(a_{jk} u_{jk} + A_{jk} \cdot \frac{p_{jk}}{N} \right) = 0 \dots (4)$$

¹⁾ Eine allgemeine Darstellung des Mehrstellenverfahrens z. B. bei L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig 1949, S. 350 ff., 361 ff.

eine Gleichung für die Näherungswerte u_{jk} (Näherung für u_{jk}) sein. (In dieser Gleichung wird die Differentialgleichung (3) an „mehreren Stellen“ x_j, y_k verwendet, während sie bei (6) und (8) nur an der Stelle 0 benutzt wird.)

Bei der Plattengleichung (2) wird man unter Ausnutzung der Symmetrien als Ansatz (3) etwa verwenden

$$B = a_0 u_0 + a_P \sum u_P + a_Q \sum u_Q + a_R \sum u_R \left\{ \begin{array}{l} + a_S \sum u_S + A_0 \Delta \Delta u_0 \\ + A_P \sum \Delta \Delta u_P + \dots \end{array} \right. (5),$$

wobei $\sum u_P$ die Summe der u -Werte in den vier Punkten P , also nach Bild 1

$$\sum u_P = u_{1,0} + u_{0,1} + u_{-1,0} + u_{0,-1}$$

bedeutet, ebenso sind die anderen Bezeichnungen $\sum u_Q, \dots, \sum \Delta \Delta u_P, \dots$ wohl ohne weiteres verständlich.

Bei der Durchführung des eben beschriebenen Abgleichs der Koeffizienten in der Taylorentwicklung erhält man als einfachste Möglichkeit den Fall des gewöhnlichen Differenzenverfahrens

$$20 u_0 - 8 \sum u_P + 2 \sum u_Q + \sum u_R - h^4 \Delta \Delta u_0 \left\{ \begin{array}{l} = \text{Restglied 6. Ordnung} \end{array} \right. (6),$$

und als genauere Formel

$$36 u_0 - 10 \sum u_P - 2 \sum u_Q + \sum u_R + \sum u_S \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{2} h^4 (2 \Delta \Delta u_0 + \sum \Delta \Delta u_P) \\ = \text{Restglied 8. Ordnung} \end{array} \right. (7).$$

Gegenüber anderen Arten der Verbesserung des Verfahrens, wie z. B. der Formel

$$184 u_0 - 77 \sum u_P + 20 \sum u_Q + 14 \sum u_R \left\{ \begin{array}{l} - \sum u_S - \sum u_T - 6 h^4 \Delta \Delta u_0 \\ = \text{Restglied 8. Ordnung} \end{array} \right. (8)$$

hat das Mehrstellenverfahren den Vorzug, bei gleichem Annäherungsgrade nicht so weit herausreichende Punkte zu verwenden, was besonders in Randnähe wichtig ist.

Man kann sogar, ohne das Quadrat von der Seitenlänge $4h$ zu verlassen, auch einen Ausdruck des Mehrstellenverfahrens aufstellen, bei dem das Restglied von 10. Ordnung wird:

$$468 u_0 - 144 \sum u_P - 8 \sum u_Q + 18 \sum u_R + 8 \sum u_S \left\{ \begin{array}{l} + \sum u_T - \frac{h^4}{20} (332 \Delta \Delta u_0 + 72 \sum \Delta \Delta u_P \\ + 26 \sum \Delta \Delta u_Q - \sum \Delta \Delta u_R) \\ = \text{Restglied 10. Ordnung.} \end{array} \right.$$

Dabei muß man allerdings unangenehme Koeffizienten mit in Kauf nehmen.

2. Beispiele mit quadratischem Gitter

Einige ganz einfache Beispiele mögen die Anwendung der Formeln erläutern. Es wurde darauf verzichtet, durch Verwendung sehr feiner Gitter eine hohe Genauigkeit zu erzielen; für technische Zwecke wird es oft genügen, mit grober Maschenweite und geringer Rechenarbeit einen Überblick über die Lösungsfunktion zu erhalten.

Beispiel I: Eigenschwingungen einer quadratischen homogenen ringsum frei aufliegenden Platte von der Seitenlänge A .

Zu der Differentialgleichung

$$\Delta \Delta u = \lambda u \dots (9)$$

treten dann die Randbedingungen

$$u = \dot{u} = 0$$

am Rande des Quadrates.

λ ist dem Quadrat der Eigenfrequenz ω proportional. Die Eigenwerte sind hier exakt bekannt, so daß man für die Näherungswerte die Fehler angeben kann. Die Tafel 1 gibt die für verschiedene Maschenweiten nach (6) und nach (7) erhaltenen Näherungswerte λA^4 für die Schwingungsformen, die bezüglich der Diagonalen D_1, D_2 und Seitenmittellinien S_1, S_2 symmetrisch sind (Gitter nach Bild 2).

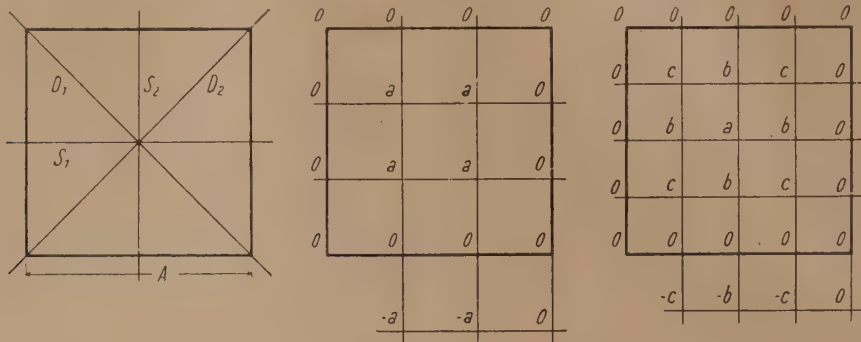


Bild 2

Tafel 1

	Gewöhnl. Diff.-Verfahren Gl. (6)	Mehrstellen- verfahren Gl. (7)
$h = \frac{A}{3}$	$\lambda A^4 = 324 (-17\%)$	405 (+ 4%)
$h = \frac{A}{4}$	$\lambda A^4 = \begin{cases} 351,4 (-10\%) \\ 4096 \\ 11\,937 \end{cases}$	$\begin{cases} 394,01 (+ 1,1\%) \\ 10\,240 \\ -37258 \end{cases}$

exakter erster Eigenwert λ_1 mit
 $\lambda_1 A^4 = 4\pi^4 \approx 389,64$

Beispiel II: Eine homogene Platte mit dem Sechseck $BCDEFG$ als Grundriß (Bild 3) sei längs BCD eingespannt, längs der anderen Sechseckseiten frei

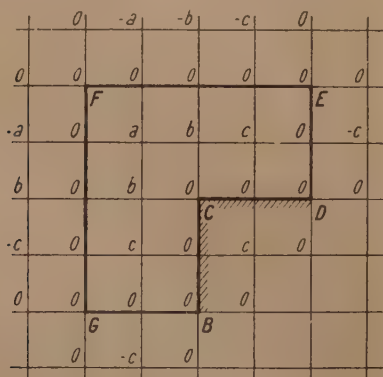


Bild 3

aufgelagert und gleichmäßig belastet, $p = \text{const.}$ Nach (7) hat man bei der Maschenweite $h = A/2$ die drei Gleichungen

$$-34a + 22b - 2c - \sigma = \frac{3}{16} A^4 \frac{p}{N}$$

$$11a - 33b + 9c = \sigma$$

$$-a + 10b - 35c = \sigma$$

mit der Lösung

$$a = \frac{649}{9364} \sigma = 0,0130 A^4 \frac{p}{N}$$

$$b = \frac{616}{9364} \sigma = 0,0124 A^4 \frac{p}{N}$$

$$c = \frac{425}{9364} \sigma = 0,0085 A^4 \frac{p}{N}$$

Die Rechnung nach dem gewöhnlichen Differenzenverfahren mit Gleichung (6) verursacht ebensoviel

Rechenarbeit bei weniger guten Ergebnissen. Man erhält dabei aus

$$18a - 16b + 2c = \sigma = \frac{1}{3} \sigma$$

$$-8a + 21b - 8c = \sigma$$

$$a - 8b + 19c = \sigma$$

die Werte

$$a = \frac{709}{3812} \sigma = 0,0116 A^4 \frac{p}{N}$$

$$b = \frac{612}{3812} \sigma = 0,0100 A^4 \frac{p}{N}$$

$$c = \frac{421}{3812} \sigma = 0,0069 A^4 \frac{p}{N}$$

Zur Berechnung von Spannungen und Momenten kann man die Differenzenausdrücke wie beim gewöhnlichen Differenzenverfahren, aber gebildet mit den nach dem hier beschriebenen genaueren Verfahren berechneten Funktionswerten, benutzen.

3. Dreiecksnetz

Da Dreiecksgitter (der Einfachheit halber mögen nur Gitter mit gleichseitigen Dreiecken betrachtet werden) in der Literatur wiederholt aufgetreten sind ^{2) 3)}, kön-

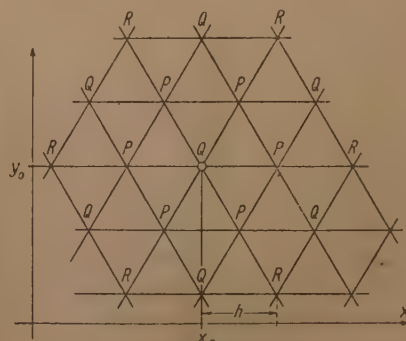


Bild 4

²⁾ H. Marcus, Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. 2. Aufl. Berlin 1932.

³⁾ H. Götlicher, Die ringsum fest eingespannte Dreiecksplatte von gleichbleibender und von stetig veränderlicher Dicke. Ing.-Arch. 11 (1938), 12–19.

nen wir uns auch hier kurz fassen. Es werden wie in Nr. 1 Ausdrücke der Form (3) gebildet und unter Ausnutzung der Symmetrien, Bild 4, der Ausdruck B in der Form (5) angesetzt, wobei die Summen wieder über die symmetrisch gelegenen Punkte zu erstrecken sind, also z. B. $\sum u_P$ geht über die sechs Punkte

$$\begin{aligned} \sum u_P = & u(x_0 + h, y_0) + u(x_0 - h, y_0) \\ & + u\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\sqrt{3}\right) \\ & + u\left(x_0 - \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\sqrt{3}\right) \\ & + u\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 - \frac{h}{2}\sqrt{3}\right) \\ & + u\left(x_0 - \frac{h}{2}, y_0 - \frac{h}{2}\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Wieder sind alle Glieder in (5) nach dem Taylorschen Satz an der Stelle x_0, y_0 zu entwickeln und die noch zur Verfügung stehenden Koeffizienten a_0, a_P, \dots sind so zu ermitteln, daß in der Taylorentwicklung das Restglied von möglichst hoher Ordnung wird. Es ergeben sich so die Formeln ⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} 12u_0 - 3\sum u_P + \sum u_Q - \frac{9h^4}{16} \Delta \Delta u_0 \\ = \text{Restglied 6. Ordnung} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} 42u_0 - 10\sum u_P + 2\sum u_Q + \sum u_R \\ - \frac{3}{16} h^4 (6\Delta \Delta u_0 + \sum \Delta \Delta u_P) \\ = \text{Restglied 8. Ordnung} \end{aligned} \right\} \quad (11).$$

4. Andere Gleichungen

Für andere Gleichungen hat man die Formeln des Mehrstellenverfahrens jeweils durch Taylorentwicklung neu aufzustellen; insbesondere, wenn die Plattensteifigkeit und damit die Koeffizienten der Ableitungen von u in der Differentialgleichung Veränderliche sind, kann die Durchführung des Mehrstellenverfahrens sehr mühsam werden. Wenn die Koeffizienten der Ableitungen von u in der Differentialgleichung aber noch konstant sind, lohnt es sich, durch einmalige Aufstellung der Taylorentwicklung sich die zugehörigen Formeln des Mehrstellenverfahrens herzuleiten, eine Arbeit, die dann für andere Randbedingungen und andere Belastungen übernommen werden kann.

Als Beispiel greifen wir die Differentialgleichung heraus

$$J_x u_{xxxx} + \frac{2J_x J_y}{J_x + J_y} u_{xxyy} + J_y u_{yyyy} = \frac{p}{E_b}$$

(kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatte; einzelne Eisenstäbe bilden unter Mitwirkung des Betons eine fachwerkartige Scheibe. Näheres bei Marcus, a. a. O. S. 105).

Für $J_x = J_y$ entsteht

$$L[u] = u_{xxxx} + u_{xxyy} + u_{yyyy} = \frac{p}{E_b J_x}.$$

Wieder wird unter Benutzung der Symmetrien ein Ansatz B nach (5) gemacht, wobei nur $\Delta \Delta u$ durch $L[u]$ zu ersetzen ist. Man erhält als einfachste Möglichkeit die Formeln des gewöhnlichen Differenzenverfahrens

$$\left. \begin{aligned} 16u_0 - 6\sum u_P + \sum u_Q + \sum u_R - h^4 L[u] \\ = \text{Restglied 6. Ordnung} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

und als genauere Formel

$$\left. \begin{aligned} 40u_0 - 10\sum u_P - 4\sum u_Q + 2\sum u_R + \sum u_S \\ - \frac{2h^4}{3} \{2L[u]_0 + \sum L[u]_P\} \\ = \text{Restglied 8. Ordnung} \end{aligned} \right\} \quad (13).$$

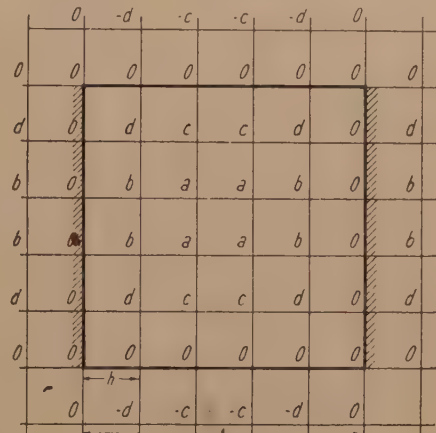


Bild 5

	$\Delta \Delta u = k$		$u_{xxxx} + u_{xxyy} + u_{yyyy} = k$	
	Gewöhl. Diff.-Verfahren Gl. (6)	Mehrstellenverfahren Gl. (7)	Gewöhl. Diff.-Verfahren Gl. (12)	Mehrstellenverfahren Gl. (13)
$\frac{a}{kA^4} =$	$\frac{1971}{625 \cdot 1522} \approx 0,00207$	$\frac{3 \cdot 5407}{625 \cdot 11398} \approx 0,00228$	$\frac{1221}{625 \cdot 802} \approx 0,00244$	$\frac{309593}{625 \cdot 187172} \approx 0,00265$
$\frac{b}{kA^4} =$	$\frac{1053}{625 \cdot 1522} \approx 0,00111$	$\frac{3 \cdot 2893}{625 \cdot 11398} \approx 0,00122$	$\frac{636}{625 \cdot 802} \approx 0,00122$	$\frac{160965}{625 \cdot 187172} \approx 0,00137$
$\frac{c}{kA^4} =$	$\frac{1287}{625 \cdot 1522} \approx 0,00135$	$\frac{3 \cdot 3537}{625 \cdot 11398} \approx 0,00149$	$\frac{795}{625 \cdot 802} \approx 0,00159$	$\frac{201699}{625 \cdot 187172} \approx 0,00172$
$\frac{d}{kA^4} =$	$\frac{698}{625 \cdot 1522} \approx 0,00073$	$\frac{3 \cdot 1942}{625 \cdot 11398} \approx 0,00082$	$\frac{421}{625 \cdot 802} \approx 0,00084$	$\frac{107748}{625 \cdot 187172} \approx 0,00092$

⁴⁾ Bei Götlicher, a. a. O., ist die Formel aufgestellt (umgeschrieben auf die hier benutzten Bezeichnungen):

$$B^* = 42u_0 - 10\sum u_P + 2\sum u_Q + \sum u_R - \frac{9h^4}{4} \Delta \Delta u_0 \approx 0 \quad (11^*).$$

Die Taylorentwicklung von (11^{*}) zeigt, daß das Restglied bei B^* von 6. Ordnung wird; im Spezialfall $\Delta \Delta u = \text{const.}$ allerdings stimmt (11^{*}) mit (11) überein und das Restglied wird von 8. Ordnung. Sonst aber ist bei (11^{*}) das Restglied von derselben Ordnung wie bei (10), so daß man bei ungleichmäßiger Belastung besser mit (10) oder (11) als mit (11^{*}) rechnet, da dann bei gleicher Ordnung des Restgliedes (10) weniger Punkte als (11^{*}) benutzt und somit weniger Rechenarbeit verursacht und andererseits, wenn man schon mehr Punkte heranziehen will, (11) genauer ist als (11^{*}).

Als einfaches Beispiel sei eine quadratische, homogene, gleichmäßig belastete Platte der Seitenlänge A gewählt, die an zwei gegenüberliegenden Seiten eingespannt, an den anderen beiden Seiten frei aufgelagert ist. Bei der Maschenweite $h = A/5$ und vier unbekannten Funktionswerten a, b, c, d nach Bild 5 wurde für die beiden Gleichungen

$$\Delta \Delta u = k \quad \dots \quad (14)$$

und

$$u_{xxxx} + u_{xxyy} + u_{yyyy} = k \quad \dots \quad (15)$$

sowohl nach dem gewöhnlichen Differenzenverfahren (6) (12), als auch nach dem hier dieselbe Rechenarbeit verursachenden Mehrstellenverfahren (7) (13) gerechnet. Die Ergebnisse der Tabelle zeigen, daß das gewöhnliche Differenzenverfahren Werte liefert, die noch um etwa 10% unterhalb der vertrauenswürdigeren Werte des Mehrstellenverfahrens liegen.

Hannover.

L. Collatz.

Über die Koppelkurve des Schubkurbelgetriebes.

Es sollen einige für die Getriebesynthese wichtige Eigenschaften der Koppelkurve eines allgemeinen Schubkurbelgetriebes abgeleitet werden, die nicht einfach durch Grenzübergang aus bekannten analogen Sätzen für das endliche Dreistabgetriebe gewonnen werden können, weil die Koppelkurve des Schubkurbelgetriebes auch von den imaginären Kreispunkten verschiedene uneigentliche Punkte besitzt. Zur bekannten Gleichung der Koppelkurve wird zunächst eine Bemerkung über die Orientierung des Koppeldreiecks und des Koordinatensystems hinzugefügt. Hierauf werden die Asymptoten der Koppelkurve bestimmt und es wird nachgewiesen, daß die reellen Schnittpunkte der beiden Paare konjugiert imaginärer Asymptoten auf der Verbindungsgeraden der beiden Doppelpunkte der Kurve liegen. Dabei besitzen die Paare der Doppelpunkte und der Asymptoten-Schnittpunkte denselben Mittelpunkt. Zu einer Koppelkurve eines Schubkurbelgetriebes gibt es stets noch eine 2. Erzeugung dieser Art. Die Gerade, die den Schnittpunkt der Kreuzkopfbahnen dieser beiden Getriebe mit dem ihnen gemeinsamen festen Kurbeldrehpunkt verbindet, steht senkrecht zur Verbindungsgeraden der beiden Doppelpunkte der Kurve.

1. Die Gleichung der Koppelkurve. $F_1ABF_{2\infty}$ sei (Bild 1) ein allgemeines Schubkurbelgetriebe mit der Exzentrizität e , dem Arm $F_1A = a$ und der Koppel $AB = c$. Der Punkt X der Koppellebene sei durch das Koppeldreieck AXB mit der Kop-

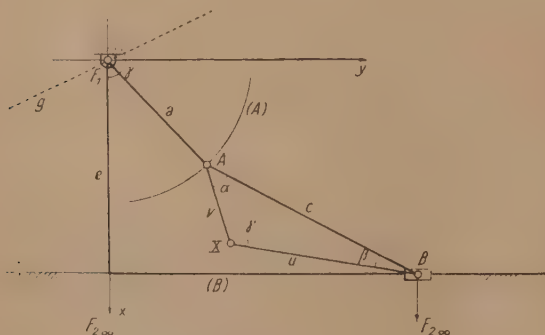


Bild 1

pel fest verbunden und so gelegen, daß das Dreieck AXB in diesem Sinne positiv umlaufen ist. Wir führen ein kartesisches Rechts-Koordinatensystem mit dem Ursprung F_1 und der x -Achse $F_1F_{2\infty}$ ein, wobei die Richtung von F_1 gegen $F_{2\infty}$ bei $e \neq 0$ mit der gegen (B) übereinstimmen soll. Ist dann $AX = v$, $BX = u$ und sind die Winkel des Koppeldreiecks bei A, B, X gleich α, β, γ , so lautet die Gleichung der von X beschriebenen Koppelkurve¹⁾

$$U^2 + V^2 = W^2$$

mit

$$\begin{aligned} U &= u \cos \gamma (x^2 + y^2 + v^2 - a^2) - 2vx(x - e), \\ V &= u \sin \gamma (x^2 + y^2 + v^2 - a^2) - 2vy(x - e), \\ W &= 2uv(x \sin \gamma - y \cos \gamma). \end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. F. Ebner, Leitfaden d. techn. wichtigen Kurven Leipzig 1906, S. 18 (Gleichung der Koppelkurve für ein negativ umlaufendes Koppeldreieck AXB und ein Rechtssystem).

Die Kurve (X) gehört also zu den zirkularen Kurven 4. Ordnung.

Bezüglich der obigen Orientierungsfestsetzung sei bemerkt: Bei jedem Schubkurbelgetriebe ist zu jeder gegebenen Stellung $F_1ABF_{2\infty}$ (Bild 2) auch die bezüglich der Steggeraden $F_1F_{2\infty}$ symmetrische Stellung $F_1\bar{A}\bar{B}F_{2\infty}$ möglich. Es sei X ein Punkt der

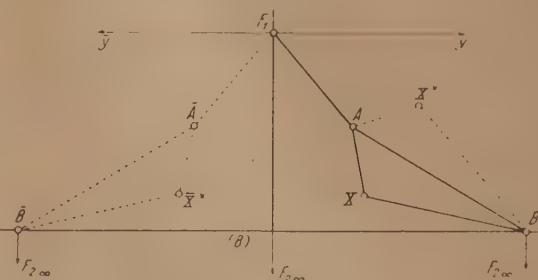


Bild 2

Koppellebene, der so gelegen sei, daß das Koppeldreieck AXB in diesem Sinn positiv umlaufen ist. Ist X^* , \bar{X}^* der zu X bezüglich der Koppel- bzw. Steggeraden symmetrische Punkt, so ist \bar{X}^* die zu der Stellung $\bar{A}\bar{B}$ der Koppel gehörige Lage des Punktes X^* . Die Bahnkurven der Punkte X und X^* sind also bezüglich der Steggeraden symmetrische Kurven. Beziehen wir demnach die Koppelkurve (X) auf das Rechtssystem $F_1(x, y)$, die Koppelkurve (X^*) auf das hierzu bezüglich der Steggeraden symmetrische Linkssystem $F_1(x, \bar{y})$, so stimmen die Gleichungen der beiden Koppelkurven miteinander überein. Wir legen also unseren Überlegungen ein im + Sinn umlaufendes Koppeldreieck AXB und das Rechtssystem $F_1(x, y)$ zugrunde und können alle Formeln auch für ein - umlaufendes Koppeldreieck AXB verwenden, wenn wir sie in diesem Falle in dem Linkssystem $F_1(x, \bar{y})$ deuten.

2. Die Doppelpunkte der Koppelkurve. $U = 0, V = 0$ sind Kegelschnitte, $W = 0$ eine Gerade g , die gegen die $+x$ -Achse unter dem Winkel γ geneigt ist. Gemeinsame Schnittpunkte dieser drei Linien sind Doppelpunkte der Koppelkurve (X) . Die Gerade g schneidet den Kegelschnitt $U = 0$ in 2 Punkten mit den Abszissen

$$x_{1,2} = \frac{-ev \pm \sqrt{e^2 v^2 + (a^2 - v^2)(c^2 - v^2)}}{u - 2v \cos \gamma} \cos \gamma.$$

Diese Schnittpunkte liegen auch auf dem Kegelschnitt $V = 0$ und sind daher Doppelpunkte D_1, D_2 der Koppelkurve. Die auf der Geraden g gemessenen Entfernungen F_1D_1, F_1D_2 sind (Bild 3)

$$s_{1,2} = \frac{-ev \pm \sqrt{e^2 v^2 + (a^2 - v^2)(c^2 - v^2)}}{u - 2v \cos \gamma}.$$

Die allgemeine Koppelkurve eines Schubkurbelgetriebes ist demnach eine zirkuläre Kurve 4. Ordnung mit 8 Doppelpunkten auf der Geraden g durch F_1 , die gegen $F_1F_{2\infty}$ unter dem Winkel γ geneigt ist²⁾. Diese Eigenschaften genügen jedoch noch nicht zur Kennzeichnung dieser Koppelkurven unter den Kurven 4. Ordnung.

3. Die Asymptoten der Koppelkurve.

a) Die Asymptoten-Richtungen. Setzt man die Gliedergruppe 4. Ordnung in der Gleichung der Koppelkurve gleich 0, so ergibt sich eine Gleichung

4. Grades für die Steigung $m = \frac{y}{x}$ der Asymptoten gegen die x -Achse. Der Faktor $m^2 + 1$ der linken

²⁾ Vgl. L. Burmeister, Kinematik I. Leipzig 1888, S. 327 — R. Müller, Z. Math. Phys. 36 (1891), S. 12. — F. Ebner, a. a. O., S. 20.

Seite zeigt, daß die Koppelkurve einfach zirkular ist. Die restliche quadratische Gleichung lautet

$$m^2 - 4 \frac{v \sin \gamma}{u} m + \frac{u^2 - 4uv \cos \gamma + 4v^2}{u^2} = 0$$

und liefert die beiden konjugiert imaginären Wurzeln

$$m_{1,2} = \frac{2v \sin \gamma \pm i(u - 2v \cos \gamma)}{u} = \frac{w}{u}$$

Im Gegensatz zu der Koppelkurve des endlichen Dreistabgetriebes besitzt also die des Schubkurbelgetriebes unendlich ferne Punkte auch außerhalb der imaginären Kreispunkte.

b) Die Asymptoten-Schnittpunkte. Die Asymptoten, die in den imaginären Kreispunkten berühren, schneiden sich im festen Drehpunkt F_1 der Kurbel; denn setzt man in der Gleichung der Koppelkurve $y = \pm ix$, $x^2 + y^2 = 0$, so verschwinden die Koeffizienten von x^4 und x^3 . F_1 ist demnach singulärer Brennpunkt der Koppelkurve und er liegt auf der Verbindungsgeraden der Doppelpunkte D_1, D_2 .

Aber auch die Asymptoten mit den Steigungen

$$m_{1,2} = \frac{w}{u}$$

sind konjugiert imaginär und schneiden sich in einem reellen Punkt, der ebenfalls auf der Geraden g liegt. Ist nämlich G_1 ein Punkt von g in der Entfernung s von F_1 und sind g_1, g_2 die Geraden mit den Steigungen w/u durch G_1 , so sind die Parameterdarstellungen von g_1, g_2

$$x = s \cos \gamma + ut, \quad y = s \sin \gamma + wt$$

mit dem Parameter t . Setzt man diese Werte in die Gleichung der Koppelkurve (X) ein, so verschwindet bei beliebigem s der Koeffizient von t^4 . Für

$$s = \frac{2ev}{2v \cos \gamma - u}$$

wird auch der Koeffizient von t^3 gleich 0. Die konjugiert imaginären Asymptoten g_1, g_2 schneiden sich also in der Tat in einem Punkt G_1 von g , der diese Entfernung s von F_1 besitzt.

4. Eine Beziehung zwischen den Doppelpunkten und den reellen Asymptoten-Schnittpunkten. Auf der Verbindungsgeraden g der Doppelpunkte D_1, D_2 liegen nach obigem der reelle Schnittpunkt F_1 der Asymptoten mit den Steigungen $\pm i$ und der reelle Schnittpunkt G_1 der Asymptoten g_1, g_2 mit den Steigungen w/u . Die vier Punkte D_1, D_2, F_1, G_1 sind voneinander nicht unabhängig. Wird vielmehr auf der Geraden g ein Abszissensystem beliebig festgelegt und sind d_1, d_2, f_1, g_1 die Abszissen der genannten 4 Punkte, so ist

$$d_1 + d_2 = f_1 + g_1,$$

d. h.: „Die Summen der von einem beliebigen Anfangspunkt auf der Geraden g gemessenen Abszissen der beiden Doppelpunkte D_1, D_2 und der reellen Asymptoten-Schnittpunkte F_1, G_1 sind einander gleich“. Wählt man nämlich als Anfangspunkt der Abszissen auf g den Punkt F_1 und als $+$ Richtung jene, die sich aus der Richtung der $+$ -Achse durch Drehung um $+\gamma$ ergibt, so ist $d_{1,2} = s_{1,2}$, $f_1 = 0$, $g_1 = s$ und nach Art. 2,3 in der Tat

$$s_1 + s_2 - s = \frac{2ev}{2v \cos \gamma - u}.$$

Man kann diese Beziehung auch so formulieren: „Die beiden Punktepaare D_1, D_2 und F_1, G_1 haben denselben Mittelpunkt.“

Der Punkt G_1 ist also leicht zu konstruieren, wenn D_1, D_2 und F_1 bekannt sind.

5. Die kennzeichnenden Eigenschaften der allgemeinen Koppelkurve eines Schubkurbelgetriebes. Die allgemeine Koppelkurve des Schubkurbelgetriebes läßt sich nach dem obigen so kennzeichnen: „Sie ist eine zirkula-

lare Kurve 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten D_1, D_2 , einem singulären Brennpunkt F_1 auf der Verbindungsgeraden g der beiden Doppelpunkte und einem reellen Schnittpunkt G_1 der beiden nicht isotropen Asymptoten, der ebenfalls auf der Geraden g und zwar so liegt, daß die Punktepaare $D_1, D_2; F_1, G_1$ denselben Mittelpunkt besitzen.“

6. Die Anzahl der zur Bestimmung der Koppelkurve verfügbaren Parameter. Als algebraische Kurve 4. Ordnung ist die allgemeine Koppelkurve eines Schubkurbelgetriebes durch 14 einfache Bedingungen bestimmt. Daß sie zirkular ist, 2 Doppelpunkte besitzt und die reellen Schnittpunkte der beiden Paare konjugiert imaginärer Asymptoten auf der Verbindungsgeraden g der beiden Doppelpunkte liegen, bedeutet je 2 Bedingungen; dazu kommt die Entfernungsbedingung unter den Doppelpunkten und den reellen Asymptoten-Schnittpunkten (Art. 4). Es scheint demnach, daß zur Bestimmung der Koppelkurve nur $14 - 2 - 2 - 2 - 1 = 7$ Bedingungen frei seien. Wählt man jedoch die Doppelpunkte D_1, D_2 und die Asymptoten-Schnittpunkte F_1, G_1 entsprechend den im Begriff „Koppelkurve eines Schubkurbelgetriebes“ enthaltenen 7 Bedingungen und dazu die konjugiert imaginären uneigentlichen Punkte U_1, U_2 der nichtisotropen Asymptoten, so sind wohl für die Koppelkurve $2 + 6 + 4 + 2 = 14$ Bedingungen vorgeschrieben; diese werden aber nicht bloß von einer Koppelkurve erfüllt, sondern von einem ganzen Büschel von Koppelkurven, das man als durch 2 zerfallende seiner Kurven bestimmt ansehen kann: Eine davon besteht aus der Geraden g und der uneigentlichen Geraden, beide doppelt gezählt; die zweite zerfällt in 2 konjugiert imaginäre Kegelschnitte k_1, k_2 ; k_1 ist bestimmt durch die Punkte D_1, D_2, I_1, U_1 und die Tangenten $g_1 = F_1 I_1$, $h_1 = G_1 U_1$; k_2 durch die Punkte D_1, D_2, I_2, U_2 und die Tangenten $g_2 = F_1 I_2$, $h_2 = G_1 U_2$. Daß die je 6 Bestimmungsstücke für jeden der Kegelschnitte k_1, k_2 miteinander verträglich sind, folgt aus der Entfernungsbedingung für die Punkte D_1, D_2, F_1, G_1 . Wird nämlich ein Kegelschnitt von 2 parallelen Geraden g, u in den Punkten $D_1, D_2; I_1, U_1$ geschnitten und sind F_1, G_1 die Schnittpunkte von g mit den Tangenten in I_1, U_1 , so haben die beiden Punktepaare $D_1, D_2; F_1, G_1$ offenbar denselben Mittelpunkt. Dies bleibt auch richtig, wenn u mit der uneigentlichen Geraden der Ebene identisch wird. — Die aus den beiden konjugiert imaginären Kegelschnitten k_1, k_2 bestehende Kurve 4. Ordnung ist reell, wenn auch nullteilig. Es gibt also ein ganzes Büschel von reellen Koppelkurven, die die angeführten Bedingungen erfüllen; von ihnen geht eine und nur eine durch jeden Punkt allgemeiner Lage der Ebene. Zur Bestimmung einer Koppelkurve eines Schubkurbelgetriebes können also außer den in dem Begriff einer solchen Kurve enthaltenen noch 8 einfache Bedingungen frei gewählt werden, oder es gibt ∞^8 Kurven 4. Ordnung mit den für solche Koppelkurven kennzeichnenden Eigenschaften.

7. Eine Beziehung für die eine Koppelkurve erzeugenden beiden Schubkurbelgetriebe. Die Bahnkurve eines beliebigen Punktes der Koppellebene eines Schubkurbelgetriebes $F_1 A B F_{2\infty}$ läßt noch eine 2. Erzeugung dieser Art vermitteln eines Schubkurbelgetriebes $F_1 A_1 B_1 F_{3\infty}$ zu ³⁾. Die Geraden $(B), (B_1)$ mit dem Schnittpunkt H seien die Kreuzkopfbahnen dieser beiden Getriebe (Bild 3), h die Gerade $F_1 H$. Dann besteht der folgende für die Getriebesynthese wichtige

Satz: „Bei einer beliebigen Koppelkurve eines Schubkurbelgetriebes steht die Verbindungsgerade h des singulären Brennpunktes F_1 mit dem Schnittpunkt H der beiden Kreuzkopfbahnen $(B), (B_1)$ normal auf der Verbindungsgeraden g der beiden Doppelpunkte D_1, D_2 .“

³⁾ W. Schmid, „Über die mehrfache Erzeugung von Koppelkurven“, Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 330—333, Art. 2.

Die Exzentrizität des 2. Schubkurbelgetriebes ist nämlich⁴⁾

$$e_1 = \frac{v}{c} e,$$

Im Beispiel von Bild 3 ist für $F_1 A B F_2$ $e = 6$,
 $a = 7$, $c = 10$, $u = 8$, $v = 4$ mit $\cos \gamma = -\frac{5}{16}$ gleich
 $-0,3125$, $\sin \gamma = 0,95$. Für die Doppelpunkte ist
 $s_{1,2} = 3,2, -7,8$, für $G_1 s = -4,6$.

Dresden.

W. Schmid.

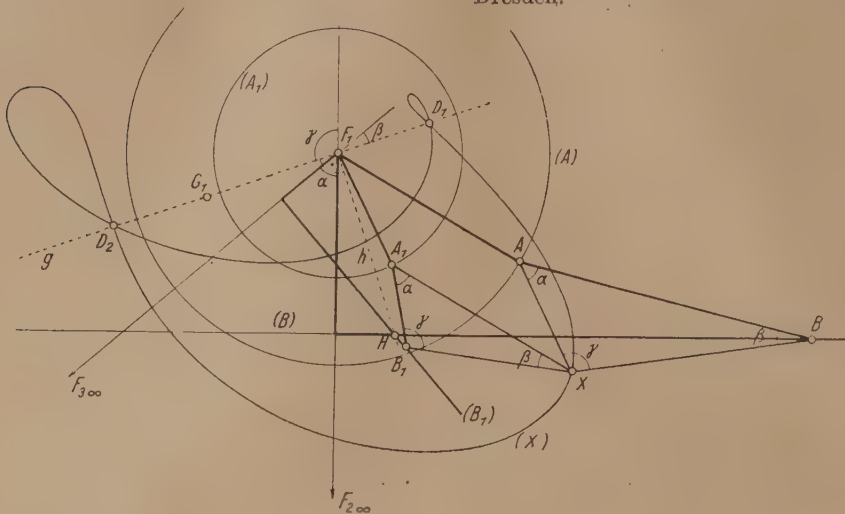


Bild 3

die Steigung der Kreuzkopfbahn (B_1) gegen die x -Achse $F_1 F_2$ gleich $\cotg \alpha$, daher ihre Gleichung

$$y + e_1 \sin \alpha = \cotg \alpha (x - e_1 \cos \alpha).$$

Die Gleichung von (B) ist

$$x = e,$$

der Schnittpunkt H von (B) und (B_1) hat demnach die Koordinaten

$$e, \frac{c \cos \alpha - v}{c \sin \alpha} e.$$

Die Steigung der Geraden $h = F_1 H$ ist also

$$\frac{c \cos \alpha - v}{c \sin \alpha}$$

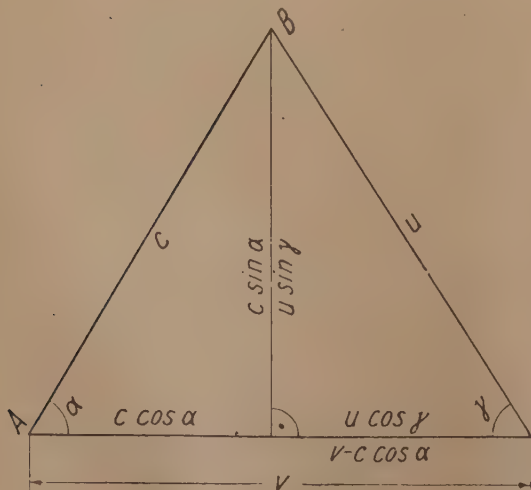


Bild 4

und dies ist (Bild 4) gleich $-\cotg \gamma$, während g die Steigung $\tg \gamma$ besitzt. Es ist also in der Tat h normal zu g .

⁴⁾ Vgl. W. Schmid, a. a. O., Art. 1, 2.

Grenzschichtströmung kurz nach dem plötzlichen Anlauf bzw. Abstoppen eines rotierenden Bodens.

Die Feststellung eines Rechenfehlers in der früheren Arbeit des Verfassers über dasselbe Problem [1], auf den freundlicherweise Herr Prof. H. Görtler (vgl. auch [4]) aufmerksam machte, gab Veranlassung, eine Neuberechnung vorzunehmen.

Um einen unmittelbaren Vergleich mit den Messungen im rotierenden Laboratorium des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung durchführen zu können, wurde die Flüssigkeitsbewegung als Relativbewegung gegen den ruhend gedachten Boden zurückgeführt. Mit den Zylinderkoordinaten r, φ und z und den Geschwindigkeitskomponenten u in tangentialer, v in radialer und w in vertikaler Richtung zu der in $v = 0$ liegenden Scheibe soll der Bewegungsablauf der inkompressiblen reibenden Flüssigkeit über dem Boden angegeben werden für den Fall

a) Anlauf, wo die ursprünglich ruhende Scheibe zur Zeit $t = 0$ plötzlich auf die konstante Drehgeschwindigkeit ω gebracht wird,

b) Auslauf, wo Scheibe und Flüssigkeit ursprünglich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse rotieren und zur Zeit $t = 0$ die Scheibe plötzlich zur Ruhe gebracht wird.

a) Anlauf: Die Grenzschichtgleichungen lauten, da wegen der Achsensymmetrie die Ableitungen nach φ zu Null werden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} + 2\omega v - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u^2}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} - 2\omega u - \omega^2 r = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \dots (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots (3)$$

(ν = kinematische Zähigkeit) unter den Randbedingungen, daß für $z = 0$: $u = v = w = 0$ und für $z = \infty$: $u = -\omega r$, $v = 0$.

Für u bzw. v machen wir die Reihenansätze:

$$u = \omega r \{F_0(\eta) + (\omega t)^2 F_2(\eta) + \dots\} \dots (4)$$

$$v = \omega r \{G_1(\eta) + (\omega t)^3 G_3(\eta) + \dots\} \dots (5),$$

$$\text{wo } \eta = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}}.$$

Die Randbedingungen lauten für $t \geq 0$:

$$\left. \begin{aligned} F_0(0) = F_2(0) = \dots = G_1(0) = G_3(0) = \dots = 0 \quad (6), \\ F_0(\infty) = -1, \\ F_2(\infty) = \dots = G_1(\infty) = G_3(\infty) = \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7).$$

Zur Berechnung von w machen wir den Ansatz:

$$w = -4\omega \sqrt{\nu t} \int_0^\eta \{ \omega t G_1(\eta) + (\omega t)^3 G_3(\eta) + \dots \} d\eta \quad (8).$$

Die in (1) und (2) eingesetzten Ansätze (4) und (5) liefern nach durchgeführtem Koeffizientenvergleich bezüglich steigender ωt -Potenzen die Differentialgleichungen:

$$F_0'' + 2\eta F_0' = 0 \quad (9),$$

$$G_1'' + 2\eta G_1' - 4G_1 = -4F_0' - 8F_0 - 4 \quad (10),$$

$$F_2'' + 2\eta F_2' - 8F_2 = 8(G_1 F_0' - F_0' H_1 + G_1) \quad (11),$$

wo $H_1 = \int_0^\eta G_1 d\eta$ gesetzt ist.

Die Beiwertfunktionen F_0 , G_1 , H_1 und F_2 wurden geschlossen integriert und ergaben unter Berücksichtigung der Randbedingungen (6) und (7), wenn

$\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta = a$, $\int_0^\eta e^{-2\eta^2} d\eta = b$, $\int_0^\eta e^{-3\eta^2} d\eta = c$ und $e^{-\eta^2} = a'$ gesetzt wird, die Lösungsfunktionen:

$$F_0 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} a \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} G_1 = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) \eta^2 a + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) \eta a' \\ - \frac{4}{\pi^{3/2}} a - \frac{8}{\pi} \eta a a' - \frac{8}{\pi} \eta^2 a^2 - \frac{2}{\pi} a'^2 \\ + 2\eta^2 \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} H_1 = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) \eta^3 a + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) \eta^2 a' \\ - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) a' - \frac{4}{\pi^{3/2}} \eta a - \frac{8}{3\pi} \eta^3 a^2 \\ - \frac{8}{3\pi} \eta^2 a a' - \frac{2}{3\pi} \eta a'^2 + \frac{4}{3\pi} a a' - \frac{8}{3\pi} b \\ + \left(\frac{4}{3\pi} - \frac{2}{3} \right) \eta^3 + \frac{2}{\pi} \eta + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

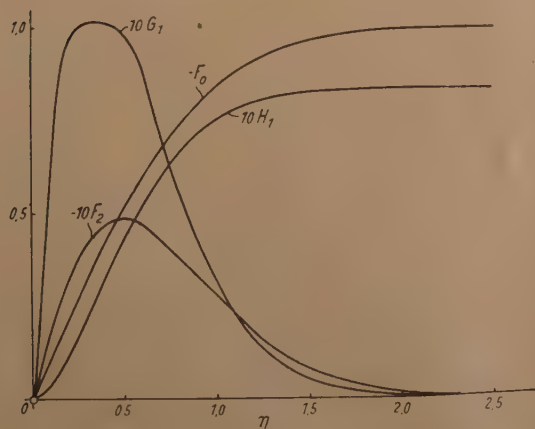


Bild 1. Beiwertfunktionen des Anlaufs

¹⁾ In der Differentialgleichung (11) war in der Arbeit des Verfassers siehe Schriftumsverzeichnis [11] irrtümlich statt mit $-F_0' H_1$ mit $-2 F_0' H_1$ gerechnet.

$$\left. \begin{aligned} F_2 = - \left\{ \frac{64}{9\pi^{3/2}} \left[-\frac{7}{4} \eta^4 a^3 - \frac{3}{4} \eta^2 a^3 - \frac{3}{16} a^3 \right. \right. \\ - 3\eta^3 a^2 a' - \frac{3}{4} \eta a^2 a' - \frac{27}{16} \eta^2 a a'^2 \\ + \frac{27}{160} \eta^3 a'^3 + \frac{53}{320} \eta a'^3 - \frac{3}{5} a' b + \frac{81}{80} \eta^4 c \\ + \frac{243}{80} \eta^2 c + \frac{243}{320} c \left. \right] + \frac{32}{3\sqrt{\pi}} \left[-\frac{3}{2\pi^{3/2}} \eta^4 a^2 \right. \\ - \frac{3}{2\pi^{3/2}} \eta^2 a^2 + \frac{3}{8\pi^{3/2}} a^3 - \frac{7}{4\pi^{3/2}} \eta^3 a a' \\ - \frac{15}{8\pi^{3/2}} \eta a a' + \left(\frac{13}{64} + \frac{15}{32\pi} \right) \eta^4 a \\ - \left(\frac{9}{64} + \frac{3}{32\pi} \right) \eta^2 a - \left(\frac{9}{256} + \frac{51}{128\pi} \right) a \\ - \frac{1}{2\pi^{3/2}} \eta^2 a'^2 - \frac{1}{2\pi^{3/2}} a'^2 + \left(\frac{21}{128} + \frac{23}{64\pi} \right) \eta^3 a' \\ + \left(\frac{9}{256} + \frac{51}{128\pi} \right) \eta a' + \frac{1}{5\pi^{3/2}} a' \left. \right] \\ + \frac{64}{15\pi^{3/2}} \left(\eta^4 + 3\eta^2 + \frac{3}{4} \right) \\ + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{17}{36} + \frac{3}{2\pi} - \frac{6\sqrt{3}}{5\pi} - \frac{64}{15\pi^2} \right) \\ \left. \left(\eta^4 a + 3\eta^2 a + \frac{3}{4} a + \frac{5}{4} \eta a' + \frac{\eta^3}{2} a' \right) \right\} \\ + \frac{32}{3\sqrt{\pi}} \left[-\frac{7}{4\sqrt{\pi}} \eta^4 a^2 - \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \eta^2 a^2 \right. \\ - \frac{3}{16\sqrt{\pi}} a^2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta^3 a a' - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \eta a a' \\ - \frac{9}{16\sqrt{\pi}} \eta^2 a'^2 + \left(\frac{31}{32} - \frac{608-75\pi}{480\pi} \right) \eta^4 a \\ + \left(-\frac{3}{32} + \frac{75\pi-368}{160\pi} \right) \eta^2 a \\ + \left(-\frac{3}{128} + \frac{75\pi-128}{640\pi} \right) a \\ + \left(\frac{39}{64} + \frac{75\pi-608}{960\pi} \right) \eta^3 a' \\ + \left(\frac{3}{128} + \frac{75\pi-320}{384\pi} \right) \eta a' - \frac{1}{10\sqrt{\pi}} a' \\ + \left(\frac{19}{30\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{8} \right) \eta^4 + \frac{23}{20\sqrt{\pi}} \eta^2 + \frac{1}{10\sqrt{\pi}} \left. \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die Funktionen sind aufgetragen in Zahlentafel 1 und dargestellt in Bild 1, wobei 3 Stellen gesichert, die 4. nicht ganz sichergestellt ist. Die Berechnung von F_2 erfolgte so, daß das inhomogene Glied der Differentialgleichung (11) nach Einsetzen der Beiwertfunktionen F_0 , G_1 , H_1 in den Bestandteil des Auslaufs und eine Restsumme aufgespalten wurde. Zudem wurde die Auslaufdifferentialgleichung nochmals in 2 Teilen integriert, was in den eckigen Klammern zum Ausdruck kommt. Die Probe durch Rückdifferenzieren zeigte, daß die Lösung jeweils richtig war. Da die Differentialgleichung linear ist, können die Teillösungen zur Gesamtlösung zusammengesetzt werden.

Aus diesen Ergebnissen erhält man die Neigung m in den logarithmischen Spiralen $r = e^{m\varphi}$ der Stromlinien am Boden in zweiter Ordnung bezüglich ωt :

$$\left. \begin{aligned} m = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{v}{u} = \frac{\omega t G_1'(0)}{F_0'(0) + (\omega t)^2 F_2'(0)} \\ = - \frac{0,7268 \omega t}{1 + 0,167 (\omega t)^2} \end{aligned} \right\} \quad (16).$$

Zahlentafel 1. Beiwertfunktionen
des Anlaufproblems

η	$F_0(\eta)$	$G_1(\eta)$	$H_1(\eta)$	$F_2(\eta)$
0	0	0	0	0
0,1	-0,1125	0,0639	0,0035	-0,0187
0,2	-0,2227	0,0975	0,0118	-0,0331
0,3	-0,3286	0,1099	0,0219	-0,0422
0,4	-0,4284	0,1084	0,0333	-0,0474
0,5	-0,5205	0,0984	0,0436	-0,0489
0,6	-0,6039	0,0846	0,0529	-0,0466
0,7	-0,6778	0,0692	0,0606	-0,0428
0,8	-0,7421	0,0547	0,0667	-0,0379
0,9	-0,7969	0,0418	0,0716	-0,0326
1,0	-0,8427	0,0311	0,0752	-0,0272
1,1	-0,8802	0,0225	0,0778	-0,0222
1,2	-0,9103	0,0158	0,0797	-0,0178
1,3	-0,9340	0,0110	0,0811	-0,0138
1,4	-0,9523	0,0077	0,0820	-0,0106
1,5	-0,9661	0,0049	0,0825	-0,0079
1,6	-0,9763	0,0028	0,0827	-0,0060
1,7	-0,9838	0,0022	0,0831	-0,0044
1,8	-0,9891	0,0015	0,0834	-0,0030
1,9	-0,9928	0,0009	0,0835	-0,0020
2,0	-0,9953	0,0004	0,0836	-0,0013
2,1	-0,9970	0,0002	0,0836	-0,0007
2,2	-0,9981	0,0000	0,0836	-0,0004
2,3	-0,9989	0,0000	0,0836	-0,0002
2,4	-0,9993	0,0000	0,0836	-0,0001
2,5	-0,9996	0,0000	0,0836	-0,0000
2,6	-0,9998	0,0000	0,0836	-0,0000

Der von Cochran [2] angegebene Wert für große Zeiten nach Bewegungsbeginn ist $m = -0,828$. Die erste Näherung $m = -0,7268 \omega t$ und die zweite Näherung (16) sind in Bild 2 aufgetragen.

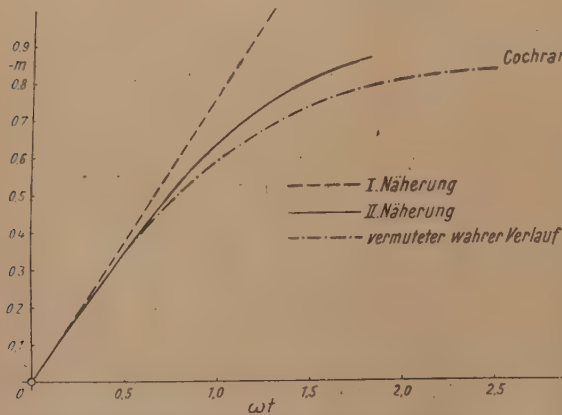


Bild 2. Stromliniensteigung am Boden für den Anlauf in I. und II. Näherung, verglichen mit dem wahrscheinlichen Verlauf auf Grund des asymptotischen Wertes nach Cochran

b) Auslauf. Die Differentialgleichungen lauten jetzt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u \cdot v}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u^2}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

unter den Randbedingungen für $t \geq 0$, daß für $z = 0$: $u = v = w = 0$; für $z = \infty$: $u = \omega r$, $v = 0$. Weiter ist $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \omega^2 r$. Die Beiwerte des Auslaufs werden

²⁾ Es ergab sich in dieser Rechnung +0,167 statt 0,23 in der früheren.

unter Benutzung des Ansatzes (4) und (5) zur Unterscheidung vom Anlauf mit einem Querstrich versehen:

$$\bar{F}_0(0) = \bar{F}_2(0) = \dots = \bar{G}_1(0) = \bar{G}_3(0) = \dots = 0 \quad (20);$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_0(\infty) &= 1, \\ \bar{F}_2(\infty) &= \dots = \bar{G}_1(\infty) = \bar{G}_3(\infty) = \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21).$$

Ansatz (8) gilt wieder, jedoch für die überstrichenen Beiwerte. Die Differentialgleichungen werden dann:

$$\bar{F}_0'' + 2\eta \bar{F}_0' = 0 \quad (22)$$

$$\bar{G}_1'' + 2\eta \bar{G}_1' - 4\bar{G}_1 = -4(\bar{F}_0^2 - 1) \quad (23)$$

$$\bar{F}_2'' + 2\eta \bar{F}_2' - 8\bar{F}_2 = 8(\bar{G}_1 \bar{F}_0 - \bar{F}_0' \bar{H}_1) \quad (24),$$

wo $\bar{H}_1 = \int_0^\eta \bar{G}_1 d\eta$ gesetzt ist.

Die Beiwertfunktionen wurden wieder geschlossen integriert und ergaben unter Berücksichtigung der Randbedingungen (20) und (21) mit den gleichen Abkürzungen a , b und c wie oben:

$$\bar{F}_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} a \quad (25)$$

$$\bar{G}_1 = -\frac{8}{\pi} \eta^3 a^2 - \frac{8}{\pi^{3/2}} \eta^2 a - \frac{4}{\pi^{3/2}} a - \frac{8}{\pi} \eta a a' \quad (27)$$

$$- \frac{2}{\pi} a'^2 - \frac{4}{\pi^{3/2}} \eta a' + 2\eta^2 \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) + \frac{2}{\pi}$$

$$\bar{H}_1 = -\frac{8}{3\pi} \eta^3 a^2 - \frac{8}{3\pi^{3/2}} \eta^2 a - \frac{4}{4\pi^{3/2}} \eta a$$

$$- \frac{8}{3\pi} b + \left(\frac{4}{3\pi} + \frac{2}{3}\right) \eta^3 + \frac{2}{\pi} \eta - \frac{8}{3\pi} \eta^3 a a'$$

$$+ \frac{4}{3\pi} a a' - \frac{4}{3\pi^{3/2}} \eta^2 a' - \frac{4}{3\pi^{3/2}} a'$$

$$- \frac{2}{3\pi} \eta a'^2 + \frac{4}{3\pi^{3/2}}$$

\bar{F}_2 siehe geschweifte Klammer (15) und die folgenden Ausführungen

Zahlentafel 2. Beiwertfunktionen
des Auslaufproblems

η	$\bar{F}_0(\eta)$	$\bar{G}_1(\eta)$	$\bar{H}_1(\eta)$	$\bar{F}_2(\eta)$
0	0	0	0	0
0,1	0,1125	-0,1240	-0,0065	0,0096
0,2	0,2227	-0,2118	-0,0236	0,0184
0,3	0,3286	-0,2672	-0,0478	0,0263
0,4	0,4284	-0,2950	-0,0761	0,0331
0,5	0,5205	-0,3009	-0,1061	0,0384
0,6	0,6039	-0,2897	-0,1357	0,0404
0,7	0,6778	-0,2671	-0,1636	0,0405
0,8	0,7421	-0,2371	-0,1889	0,0386
0,9	0,7969	-0,2038	-0,2109	0,0351
1,0	0,8427	-0,1699	-0,2296	0,0307
1,1	0,8802	-0,1380	-0,2450	0,0258
1,2	0,9103	-0,1090	-0,2573	0,0209
1,3	0,9340	-0,0842	-0,2669	0,0164
1,4	0,9523	-0,0633	-0,2743	0,0125
1,5	0,9661	-0,0467	-0,2798	0,0092
1,6	0,9763	-0,0336	-0,2838	0,0067
1,7	0,9838	-0,0237	-0,2868	0,0049
1,8	0,9891	-0,0164	-0,2887	0,0032
1,9	0,9928	-0,0110	-0,2900	0,0020
2,0	0,9953	-0,0075	-0,2909	0,0012
2,1	0,9970	-0,0047	-0,2915	0,0007
2,2	0,9981	-0,0030	-0,2919	0,0004
2,3	0,9989	-0,0019	-0,2921	0,0002
2,4	0,9993	-0,0014	-0,2922	0,0001
2,5	0,9996	-0,0008	-0,2923	0,0000
2,6	0,9998	-0,0000	-0,2923	0,0000

²⁾ In der Differentialgleichung (24) war in der Arbeit siehe Schriftumsverzeichnis [1] irrtümlich statt mit $-\bar{F}_0 \bar{H}_1$ mit $-2 \bar{F}_0 \bar{H}_1$ gerechnet.

Diese Funktionen sind aufgetragen in Zahlentafel 2 und dargestellt in Bild 3, wo 3 Stellen gesichert, die 4. nicht ganz sichergestellt ist. Im Gegensatz zur früheren

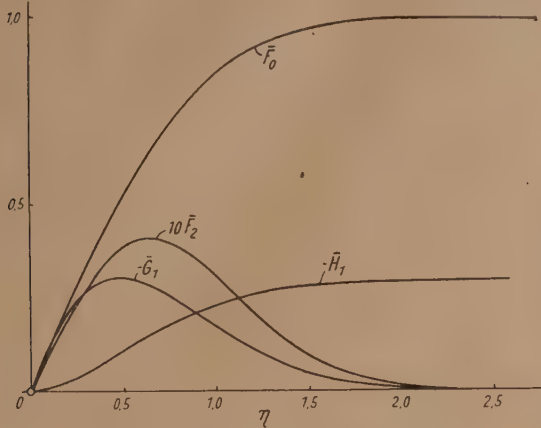


Bild 3. Beiwertfunktionen des Auslaufs

Arbeit wurde auch hier mit dem richtiggestellten inhomogenen Glied der Gleichung (24) statt numerisch in geschlossenen Ausdrücken integriert.

Die Stromlinien am Boden ergeben sich jetzt in zweiter Ordnung zu:

$$m = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{v}{u} = - \frac{1,2732 \omega t}{1 + 0,0794 (\omega t)^2} \quad (29).$$

Mit der ersten Näherung $m = -1,2732 \omega t$ ist die zweite Näherung (29) in Bild 4 aufgetragen. Der Wert $+0,0794 (\omega t)^2$ gibt einen besseren Verlauf gegen den von Bödewadt [3] kurz nach der Arbeit [1] ge-

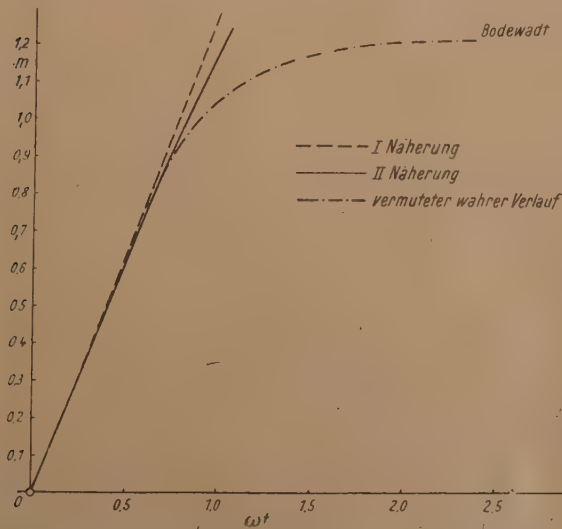


Bild 4. Stromliniensteigung am Boden für den Auslauf in I. und II. Näherung, verglichen mit dem wahrscheinlichen Verlauf auf Grund des asymptotischen Wertes nach Bödewadt

fundenen asymptotischen Wert $m = -1,218$ als der frühere Wert $-0,0458 (\omega t)^2$.

Schrifttum

- [1] K.-H. Thiriot: Über die laminare Anlaufströmung einer Flüssigkeit über einem rotierenden Boden bei plötzlicher Änderung des Drehungszustandes. Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 1 bis 13.
- [2] W. G. Cochran: The flow due to a rotating disc. Proc. Cambridge philos. Soc. Bd. 30 (1934), S. 365—375.

[3] U. T. Bödewadt: Die Drehströmung über festem Grunde. Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 241—253.

[4] H. Görtler: Zähle Flüssigkeiten. Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939—1946, Teil III. angew. Math. Mech., 5, S. 69.

Friedberg i./H.

K.-H. Thiriot.

Notiz zur Stabbiegung.

Ein gerader, horizontaler, an seinen beiden Enden $x = -\frac{l}{2}$ und $x = \frac{l}{2}$ gelenkig gelagerter Stab mit der konstanten Biegesteifigkeit EJ sei vertikal belastet (siehe Bild 1). Die Belastung $q(x)$ sei vorläufig stetig, aber sonst beliebig vorausgesetzt. Sie werde wie üblich

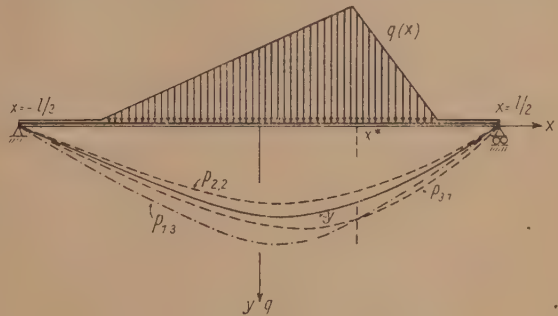


Bild 1

positiv gerechnet, wenn sie in Richtung der Erdschwere wirkt, desgleichen die Durchbiegung $y(x)$. Letztere bestimmt sich bei den Randbedingungen

$$y\left(-\frac{l}{2}\right) = y\left(\frac{l}{2}\right) = 0, \quad y'\left(-\frac{l}{2}\right) = y'\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad (1)$$

als einmal stetig differenzierbare Funktion von x eindeutig aus der Differentialgleichung

$$EJ y^{(4)}(x) = q(x) \quad (2).$$

Es sei $p_{\alpha_1, \alpha_2}(x)$ (mit ganzzahligem $\alpha_1, \alpha_2 \geq 1$) die eindeutig bestimmte Parabel (höchstens $(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)$ -ter Ordnung in x , welche die Biegelinie $y(x)$ in $x = -\frac{l}{2} = -h$ bzw. $x = \frac{l}{2} = h$ α_1 -punktig bzw. α_2 -punktig berührt. $p_{\alpha_1, \alpha_2}(x)$ hat also mit $y(x)$ beispielsweise in $x = -h$ sämtliche Ableitungen bis einschließlich der $(\alpha_1 - 1)$ -ten gemeinsam.

Mit den Abkürzungen

$$y'\left(\frac{l}{2}\right) = y'_+, \quad y'\left(-\frac{l}{2}\right) = y'_-, \quad 2h = l$$

erhält man für die Paare $(\alpha_1, \alpha_2) = (2, 2), (3, 1), (1, 3)$ bei Berücksichtigung von (1) die Parabelgleichungen

$$\left. \begin{aligned} 4 p_{2,2}(x) &= -h \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) \left(y'_+ - y'_- + \frac{x}{h} (y'_+ + y'_-)\right) \\ 4 p_{3,1}(x) &= h y'_- \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) \left(3 + \frac{x}{h}\right) \\ 4 p_{1,3}(x) &= -h y'_+ \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) \left(3 - \frac{x}{h}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

Für die Abweichung $y(x) - p_{\alpha_1, \alpha_2}(x)$ im Intervall $-h \leq x \leq h$ gilt ¹⁾

$$y(x) = p_{\alpha_1, \alpha_2}(x) + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)!} (x+h)^{\alpha_1} (x-h)^{\alpha_2} y^{(\alpha_1 + \alpha_2)}(z) \quad (4),$$

¹⁾ A. Markoff: Differenzenrechnung (deutsche Übersetzung von Th. Friesendorff und E. Prümmler). Leipzig 1896, S. 8.

wo z eine gewisse, uns hier näher nicht interessierende Zwischenstelle mit $-h \leq z \leq h$ ist.

Wir machen nun weiter die fürs Folgende wesentliche Voraussetzung, daß die stetige Flächenbelastung durchweg gleichgerichtet ist. Es sei z. B. $q(x)$ durchweg nichtnegativ, also für $-h \leq x \leq h$

$$q(x) \geq 0 \quad \dots \quad (5)$$

und natürlich

$$q(x) \neq 0 \quad \dots \quad (5a).$$

Dann folgt aus (4), (2), (5) für $-h \leq x \leq h$

$$p_{2,2}(x) \leq y(x) \leq p_{3,1}(x), \quad p_{1,3}(x) \quad \dots \quad (6).$$

Die Parabeln $p_{2,2}(x)$ bzw. $p_{3,1}(x)$, $p_{1,3}(x)$ schließen also (siehe Bild 1) im Intervalle $-h \leq x \leq h$ die Biegelinie $y(x)$ ein. Nach Voraussetzung schneiden sich $p_{1,3}(x)$, $p_{3,1}(x)$ in $x = -h$ und $x = h$. Die Abszisse x^* ihres dritten Schnittpunktes liegt im Innern des Intervalles $(-h, h)$. Dies folgt aus der Anschauung oder aus den Gl. (4), (5), (5a). Unter Verwendung von (3) erhält man

$$-1 < \frac{x^*}{h} = 3 \frac{y'_+ + y'_-}{y'_+ - y'_-} \quad \dots \quad (7).$$

(Bei unseren Voraussetzungen ist $p_{1,3}(x) \equiv p_{3,1}(x)$ nicht möglich, so daß es immer genau eine solche Stelle x^* gibt.)

Nunmehr folgt aus (6)

$$p_{2,2}(x) \leq y(x) \leq \begin{cases} p_{3,1}(x) \leq p_{1,3}(x), \\ (-h \leq x \leq x^* < h), \\ p_{1,3}(x) \leq p_{3,1}(x), \\ (-h < x^* \leq x \leq h) \end{cases} \quad (8).$$

Aus (7) und (8) lassen sich in einfacher Weise einige Folgerungen ziehen.

a) Der Schnittpunkt S der Tangenten an die Biegelinie in $x = -\frac{l}{2}$ und $x = \frac{l}{2}$ (siehe Bild 2) hat die Abszisse

$$\frac{x}{h} = \frac{y'_+ + y'_-}{y'_+ - y'_-}.$$

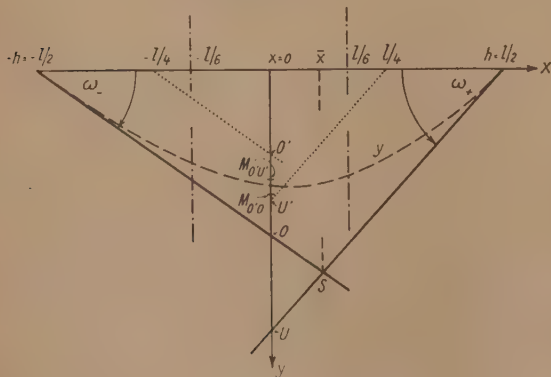


Bild 2

Wegen (7) gilt also

$$-\frac{l}{6} < \bar{x} < \frac{l}{6} \quad \dots \quad (9).$$

b) Aus (8) erhält man, wenn man noch die spitzen Winkel ω_- , ω_+ (siehe Bild 2) einführt, also

$y'_- = \operatorname{tg} \omega_-$, $y'_+ = -\operatorname{tg} \omega_+$ und weiter $y(0) = y_0$ setzt, für y_0 die Ungleichung

$$\frac{l}{8} (\operatorname{tg} \omega_- + \operatorname{tg} \omega_+) \leq y_0 \leq \frac{3}{8} l \cdot \operatorname{Min}(\operatorname{tg} \omega_-, \operatorname{tg} \omega_+) \quad (10).$$

Bei zu $x = 0$ symmetrischer Belastung folgt aus (10)

$$\frac{l}{4} \operatorname{tg} \omega_- \leq y_0 \leq \frac{3}{8} l \operatorname{tg} \omega_- \quad \dots \quad (10a)$$

sowie die Näherung

$$y_0 \approx \frac{5}{16} l \operatorname{tg} \omega_-.$$

Sind die Endtangente zeichnerisch gegeben, so führt die Ungleichung (10) auf die folgende Konstruktion zur Eingrenzung von y_0 (siehe Bild 2):

Durch die Punkte $x = \pm \frac{l}{4}$ der x -Achse ziehe man zu den gegebenen Tangenten die Parallelen. Man erhält so auf der Geraden $x = 0$ 4 Schnittpunkte O, U, O', U' . Dabei gehöre zur steileren der beiden Richtungen der Buchstabe U , zur anderen der Buchstabe O . Es sei $M_{O'U'}$ die Mitte der Strecke $O'U'$, $M_{OO'}$ die Mitte von OO' . Dann schneidet die Biegelinie die Gerade $x = 0$ in einem Punkte von $M_{O'U'}$, $M_{OO'}$. — Falls $\omega_+ = \omega_-$ ist, fallen O und U , desgleichen O', U' , $M_{O'U'}$ zusammen. Man erhält so die Eingrenzung entsprechend (10a).

Aus (10) folgt weiter

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega_- \leq \operatorname{tg} \omega_+ \leq 2 \operatorname{tg} \omega_- \\ \frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega_+ \leq \operatorname{tg} \omega_- \leq 2 \operatorname{tg} \omega_+ \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (11).$$

Man bestätigt leicht, daß (11) gleichbedeutend ist mit (9).

c) Die für stetiges $q(x) \geq 0$ aufgestellten Ungleichungen (9) und (10) bleiben auch bei unstetigem $q(x)$ sowie im Falle des Auftretens von konzentrierten Einzellasten gültig, falls sämtliche Lasten vertikal und gleichgerichtet wirken und die Diskontinuitäten nur in endlicher Zahl auftreten. Wegen der Gültigkeit des Superpositionsprinzips genügt es, die Behauptung für den Fall einer unstetigen Belastung des Stabes durch eine Einzellast und eine unstetige Flächenlast nachzuweisen. Man kann nun letztere Lasten beliebig genau durch stetige nicht-negative Flächenlasten annähern. Daher treffen die für solche Näherungen gültigen Ungleichungen (9) und (10) auch in der Grenze zu.

Stuttgart.

E. Pflanz.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. phil. R. Becker (ord. Prof. a. d. Univ. Göttingen) Vorstufe zur theoretischen Physik. VII u. 172 S. mit 94 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis kart. 7,50 DM.

Das Buch ist aus dem Empfinden heraus entstanden, daß trotz der innigen Verknüpfung von Mathematik und Physik in der Entwicklung der theoretischen Physik während der letzten Jahrzehnte „eine zunehmende Entfremdung zwischen diesen beiden

Fächern eingetreten ist, die besonders im Unterrichtsbetrieb von beiden Seiten schmerzlich empfunden wird“, und es soll deshalb den Lernenden vor dem eigentlichen Studium der theoretischen Physik zu dem „Erlebnis der Identität von mathematischen und physikalischen Aussagen“ verhelfen. Dieser bedauerlichen und nicht wegzuleugnenden Entfremdung zwischen beiden Disziplinen entgegenzuwirken, ist das vorliegende Buch in hohem Maße geeignet. Abgesehen

von einem kurzen Exkurs in die Elektrostatik werden die behandelten Beispiele der Mechanik und der Wärmelehre entnommen, den beiden Teilgebieten also, die sich durch eine besondere verschiedenartige Behandlung der Probleme auszeichnen, so daß dem Leser auf knappem Raum eine große Auswahl physikalischer und mathematischer Fragestellungen nahegebracht wird. In der Mechanik wird zunächst die Mechanik eines und vieler Massenpunkte behandelt, und dann werden die Längsschwingungen einer linearen, elastischen Kette mit dem Grenzfall des elastischen Stabes ausführlich diskutiert. In der Wärmelehre nehmen Beispiele aus der kinetischen Gastheorie den breitesten Raum ein. Es schließt sich ein weiterer Teil „Mathematische Erinnerungen und Beispiele“ an, der in seiner Unvollständigkeit und Knappheit nicht ganz so überzeugend wirkt wie die Hauptteile des Buches. Hier wäre eher ein Hinweis auf die einschlägige mathematische Literatur zu empfehlen. Die mathematischen und physikalischen Voraussetzungen entsprechen im allgemeinen dem Bildungsstand eines 3. oder 4. Semesters, doch werden an einigen Stellen in dem Bestreben, den Leser an die moderne Betrachtungsweise heranzuführen, auch Tatsachen gebracht, die vorläufig einfach hingenommen werden müssen. Besonders hervorzuheben ist die klare, einprägsame Sprache, die den Leser oft persönlich anspricht und ihn zum eigenen Mit- und Weiterdenken veranlaßt; und das ist zum rechten Verständnis dieses trotz des bescheidenen Titels recht anspruchsvollen Buches unentbehrlich.

Dresden.

G. Opitz.

Prof. Dr. Richard Gans, Vektoranalysis mit Anwendungen aus Physik und Technik. (Teubners Mathematische Leitfäden Bd. 16), siebente Aufl. 120 S. m. 44 Abb. Leipzig 1950. B. G. Teubners Verlagsgesellschaft. Preis kart. 5,90 DM.

Die sechste Auflage dieses 1905 zuerst erschienenen Bändchens wurde in Bd. 10 (1920) Seite 308/309 dieser Zeitschrift angezeigt. Der Inhalt dieser siebenten, von Dr. Stein durchgesehenen Auflage ist im wesentlichen unverändert geblieben. Das Bändchen unterscheidet sich von manchen anderen einführenden Büchern dadurch, daß die Beweisführung in größerem Umfang rein vektoriell ist. Die Anwendungen sind in der Hauptsache dem Gebiet der Elektrodynamik entnommen.

Dresden.

Willers.

Fr. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis. (Göschens Lehrbücherei Band 12), 2. Aufl. 410 S. m. 93 Abb. Berlin 1950. Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 24,— DM.

Es gibt wohl kaum einen Mathematiker, dem beim Studium der numerischen, graphischen und instrumentellen Verfahren das Lehrbuch von Willers unbekannt geblieben ist und der es nicht wegen seiner Reichhaltigkeit und vorbildlichen Klarheit schätzen gelernt hat. Darüber hinaus ist es einem großen Kreise von Ingenieuren und Physikern ein zuverlässiger Berater in der Praxis ihres Berufs geworden. Wenn nun das Buch über zehn Jahre vergriffen und bereits sehr gesucht war, so ist das lange Ausbleiben einer Neuauflage allein den widrigen Verhältnissen der Kriegs- und Nachkriegszeit zuzuschreiben. Der Verfasser hat inzwischen sein Werk einer gründlichen Neubearbeitung unterzogen. Einige veraltete Verfahren und solche mit beschränktem Anwendungsbereich wurden fortgelassen. Dafür ist aber jedes Kapitel durch Zusätze und Literaturhinweise bereichert worden, die alle wesentlichen Fortschritte bis in die neueste Zeit berücksichtigen. Trotz dieser Vermehrung des Inhalts ist das Buch gut lesbar und ein Lehrbuch im besten Sinne des Wortes geblieben und hat nichts von seiner Frische eingebüßt. Wenn

uns der Verlag jetzt die zweite Auflage auf gutem Papier gedruckt zu einem angemessenen Preise vorlegt, so ist es ein Wiedersehen mit einem guten Freund, auf dessen erfahrenen Rat wir nicht mehr verzichten mögen.

Inhalt: 1. Das Zahlenrechnen und seine Hilfsmittel. 2. Interpolation im engeren Sinne. 3. Angenäherte Integration und Differentiation. 4. Interpolation im weiteren Sinne; trigonometrische Interpolation. 5. Praktische Gleichungslehre. 6. Genäherte Integration von Differentialgleichungen.

Aachen.

Günther Schulz.

Dr. phil. Hans Hornich (ord. Prof. a. d. Techn. Hochschule Graz). **Lehrbuch der Funktionentheorie.** VII u. 216 S. m. 34 Abb. Wien 1950. Springer-Verlag. Preis 19,50 DM, geb. 21,60 DM.

In wohl ausgewogener Auswahl aus dem Gesamtgebiet der Funktionentheorie hat der Verf. in seinen Vorlesungen die klassischen Bestandteile und Grundpfeiler jeder Einführung in das Gebiet knapp und treffend dargestellt. Er ist dabei mehrfach Wege gegangen, die von dem Vorgehen früherer Vorlagen deutlich abweichen; wir erwähnen etwa die Einführung der analytischen Fortsetzung auf Grund eines Äquivalenzprinzips, die nahelegend, aber wohl bisher in Lehrbüchern nicht mit solcher Folgerichtigkeit entwickelt wurde. Gegenüber der kurz zuvor erschienenen Darstellung von Heinhold betont Hornich stärker die den Universitäten eigentümliche Seite der Funktionentheorie; wenn dabei das anschauliche Moment zurücktritt, wie es in vielen Figuren über konforme Abbildungen dem Ingenieurmathematiker näher liegt, so muß doch betont werden, daß das Buch auch für diesen sehr wertvoll ist, weil es die unentbehrlichen Grundgedanken ohne zu viel Belastung mit Theorie so darstellt, daß sie rasch zu handwerklichem Gebrauch eingesetzt werden können. Die einzelnen Kapitel betreffen: Komplexe Zahlen, Differenzierbare Funktionen, Potenzreihen, Integrale im Komplexen, Satz von Cauchy, Isolierte Singularitäten, Reihen von Funktionen, Analytische Fortsetzung, Untersuchung spezieller Funktionen, Algebraische Funktionen und ihre Integrale. — Das letzte Kapitel gibt eine kurze, aber vorzügliche Darstellung der Grundgedanken der Theorie der algebraischen Funktionen und der Abelschen Integrale (ohne aber auf volle Beweise mit arithmetischen Mitteln einzugehen); und es umfaßt einen Ausblick auf die elliptischen Funktionen und Integrale. Große Theorien sind im vorletzten Kapitel etwas isoliert vertreten durch den Riemannschen Abbildungssatz und den Picardschen Satz; der Ingenieurmathematiker wird das für die konforme Abbildung etwas bedauern; die Beweistechnik erscheint dort — notwendig ohne größeren Zusammenhang wiedergegeben — etwas isoliert. — Die Druckerei war offenbar ihren mathematischen Aufgaben noch nicht ganz gewachsen, worunter die Formelbilder öfter leiden. — Eine Anzahl trefflich gewählter Übungsaufgaben ist anerkennend zu nennen. In allem: Ein sehr gutes Buch.

Gießen.

E. Ullrich.

Dr.-Ing. Hans Umstätter (Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie). **Strukturmechanik.** Ein Beitrag zur Physik der Kolloide. XVI u. 237 S. mit 1 Teilbild, 143 Abb. u. 34 Tab. Dresden und Leipzig 1948. Verlag Theodor Steinkopff. Preis: br. 17,— DM., geb. 19,— DM.

Der Verfasser hat sich mit der vorliegenden Monographie die Aufgabe gestellt, die mannigfaltigen Erscheinungen und Gesetzmäßigkeiten der Kolloidphysik unter einem einheitlichen Gesichtspunkt nicht nur darzustellen, sondern darüber hinaus ihnen eine theoretische Grundlage zu geben. Da die Kolloide infolge ihrer „Struktur“ den Bedingungen der klassischen Kontinuumsmechanik nicht mehr gehorchen, ist es erforderlich, diese entsprechend zu modifizieren,

bzw. zu ergänzen. In diesem Sinne bezeichnet der Verfasser und stellt als die drei wichtigsten Postulate der Strukturmechanik an die Spitze: die Stetigkeit der Zeit, die Quantelung des Raumes und die Endlichkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reibungsstörungen. Die durch die Struktur bedingte Quantelung des Raums führt rechnerisch zur teilweisen Einführung von „Extremalwerten“ $\Delta x, \Delta y, \dots$ in die Grundgleichungen an Stelle der Differentialwerte dx, dy, \dots , eben wegen der notwendigen Forderung, daß die Strukturelemente unveränderlich sein sollen, wenn sich die Qualität der Substanz nicht ändert. Dies gilt z. B. für den Gradienten einer Zustandsgröße (Geschwindigkeit, Konzentration, Temperatur) $\Delta x/\Delta y$.

Es bleibe dahingestellt, wie weit man im Einzelnen der mathematischen Behandlung und den gezogenen Folgerungen zu folgen geneigt ist. Zu würdigen ist jedenfalls der Versuch, auf solche Weise ein einheitliches Gebäude zu schaffen. Zu betonen ist ferner noch die Reichhaltigkeit des Inhalts, der stets das Bestreben zeigt, die gezogenen Folgerungen an den zahlreichen bereits vorliegenden Beobachtungsergebnissen der Rheologie u. a. zu prüfen. So darf man im Ganzen das Buch als einen zwar vielfach kühnen, oft nicht ganz durchsichtigen, aber trotzdem durchaus anzuerkennenden Vorstoß in dieses schwierige Gebiet bezeichnen.

Weilburg (Lahn).

L. Schiller.

Veröffentlichungen des Bamberger Instituts für Erdmessung, Bamberger Verlagshaus Meisenbach & Co. Bamberg 1949.

- Band 1:** Das Zentraleuropäische Dreiecksnetz. Grundlagen, 122 S. und 5 Tafeln. Preis 4,— DM.
- Band 3:** Professor Hans Boltz und sein Werk. 77 S., Preis 3,— DM.
- Band 4:** Beiträge zur Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze unter besonderer Berücksichtigung des Zentraleuropäischen Netzes. 143 S. mit 6 Abb. Preis 4,— DM.
- Band 6:** Beiträge zur Lotabweichungsausgleichung und Geoidbestimmung. Allgemeinerer Betrachtungen und Durchführung im Bereich des Zentraleuropäischen Netzes. I. Teil: 106 S. mit 6 Abb., 2. Teil: 25 Tafeln. Preis 5,— DM.
- Band 9:** Beiträge zur Zentrierung von Richtungen. 47 S. mit 9 Abb. Preis 3,— DM.

Diese Bände bilden den verheißungsvollen Anfang einer Schriftenreihe, mit der das von Direktor G i g a s geleitete Bamberger Institut für Erdmessung über seine im Jahr 1945 begonnene Tätigkeit berichtet. In außerordentlich kurzer Zeit ist u. a. bereits eine umfangreiche Arbeit von großer internationaler Bedeutung geleistet worden: die Ausgleichung des Zentraleuropäischen Dreiecksnetzes (ZEN).

Die in den Bänden 1, 3, 4, 6 enthaltenen Veröffentlichungen bilden insofern eine in sich zusammenhängende Gruppe, als sie sich mittelbar auf diese Arbeit bzw. die bei derselben benutzten Boltz'schen Ausgleichungsverfahren beziehen.

Der Band 1 bringt nach einem Geleitwort von G i g a s eine von L e v a s s e u r verfaßte allgemeine Übersicht über die Ausdehnung, Anlage und Ausgleichung des ZEN. Daran schließt sich eine grundsätzliche Studie von W o l f über die Ausgleichung astronomisch-geodätischer Dreiecksnetze mit besonderer Berücksichtigung des ZEN. Gewisse Einzelprobleme, die sich bei der Ausgleichung des ZEN aus dessen Eigenart ergaben, werden in den Bänden 4 und 6 von W o l f und B e r r o t h in einer ganzen Reihe besonderer Aufsätze ausführlicher behandelt. Im 2. Teil des Bandes 6 ist in 25 Tafeln das auf die einzelnen Arbeitsgänge und die Ergebnisse der Ausgleichung des ZEN bezügliche zahlenmäßige Material in übersichtlicher Weise zusammengestellt. Der Band 3

bringt nach einem Nachruf von G i g a s auf den im Jahre 1947 verstorbenen Prof. Dr. H a n s B o l t z eine Studie von W o l f, in der die Stellung des Boltz'schen Entwicklungsverfahrens in der Ausgleichungsrechnung nach bedingten Beobachtungen behandelt wird.

Das ZEN ist ein gitterförmig gestaltetes Rahmenetz, das im Norden durch die Nord- und Ostsee, im Osten durch die Ostgrenzen Lettlands und Polens, im Süden durch den Parallelkreis in 48° Breite und im Westen durch den Rhein begrenzt wird. Das geodätische und astronomische Beobachtungsmaterial ist aus selbständigen Haupttriangulationen der vom ZEN erfaßten Länder entnommen. Als Bezugsfläche ist das Hayford-Ellipsoid gewählt.

Die bereits im Jahr 1947 zum Abschluß gebrachte Ausgleichung I des ZEN stellt einen Mittelweg zwischen der B o w i e-Methode und einem neuen von W o l f entwickelten Verfahren vor, das der strengen Ausgleichung nach E g g e r t gleichkommt.

Die B o w i e-Methode und in der Sowjetunion von K r a s s o w s k i j und U r m a j e w entwickelte Verfahren haben als Vorbilder gedient. Es sind jedoch verschiedene grundsätzliche Ergänzungen und Abänderungen eingeführt worden. Durch eine besondere Lotabweichungsausgleichung haben die Ausgangsdaten im alten Zentralpunkt Potsdam (H e l m e r t-Turm) Verbesserungen erhalten. Die L a p l a c e'schen Azimute und die Grundlinien mit ihren Vergrößerungnetzen wurden nicht als fehlerfreie Elemente behandelt, sondern durch besondere Azimut- und Basisausgleichungen mit Verbesserungen versehen, die zur Tilgung der auf die Azimut- und Grundlinienbedingungen bezüglichen Widersprüche beitragen. Die Gewichte für die bei der Schleifenausgleichung benutzten Breiten- und Längenunterschiede wurden als Funktionsgewichte aus den Verbindungsketten entnommen. Die Schleifenausgleichung erfolgte nach bedingten Beobachtungen.

Nach Abschluß der Ausgleichung I ist eine nochmalige Ausgleichung II des (durch Einbeziehung von zwei neuen Verbindungsketten etwas veränderten) ZEN nach dem neuen von W o l f entwickelten Verfahren durchgeführt worden.

Ebenso wie beim Verfahren von E g g e r t werden auch bei dem von W o l f die B o w i e'schen Knotenetze durch einfache Seiten, Knotenstrahlen, ersetzt, so daß die Verbindungsketten alle Richtungsmessungen enthalten. Beim Heranführen der Verbindungsketten an einen solchen Knotenstrahl ergeben sich je ein bis zwei den übergreifenden Ketten gemeinsame Dreiecke, deren Identität in den betreffenden Ketten durch Einführung von je zwei Winkelidentitätsbedingungen gesichert wird. Diese Winkelidentitätsbedingungen werden mit den Azimut-, Grundlinien-, Breiten- und Längenschluß-Bedingungen in einem einzigen Ausgleichungsvorgang der Hauptausgleichung zusammengefaßt. Die Gewichte der Verbindungsketten werden mit Rücksicht nicht nur auf die Länge, sondern auch auf die geometrische Gestalt und die Güte der Kette angenommen. Die Ausgleichung wird nach vermittelnden Beobachtungen in schrittweiser Annäherung durchgeführt. Mit der B o w i e-Methode hat das Verfahren von W o l f insofern Ähnlichkeit, daß in beiden Fällen nicht mit Längen und Azimuten geodätischer Linien gerechnet wird, sondern mit Breiten- und Längenunterschieden zwischen Kettenanfangs- und Endpunkt. Die gemessenen L a p l a c e'schen Azimute und die Grundlinien werden aber, ebenso wie bei der Ausgleichung I des ZEN, nicht als fehlerfreie, sondern als verbesserungsbedürftige Elemente behandelt.

Mit der Ausgleichung II des ZEN nach dem von W o l f entwickelten Verfahren wurde der doppelte Zweck verfolgt: 1. das W o l f'sche Verfahren bezüglich seiner praktischen Durchführbarkeit zu prüfen, und 2. die Zuverlässigkeit der Ausgleichung I zu kontrollieren. Das Ergebnis war sowohl in der einen wie in der anderen Hinsicht durchaus befriedigend.

Dank seiner Lage, dem umfangreichen Beobachtungsmaterial und seiner hochentwickelten Ausgleichung erscheint das ZEN sehr wohl als Anschlußblock für weitere großräumige Ausgleichungen geeignet. U. a. hat das ZEN mit dem Ostseering der Baltischen Geodätischen Kommission, dessen Ausgleichung durch Ölander im Jahr 1949 zum Abschluß gelangt ist, vier aufeinanderfolgende Stationen, also drei Polygonseiten, gemeinsam. Es ist also Hoffnung vorhanden, daß demnächst durch Zusammenschluß des Ostseerings und des ZEN ein weiterer Schritt zur Schaffung eines gesamteuropäischen Dreiecksnetzes erfolgen werde.

Die bei der Ausgleichung des ZEN gewonnenen Erfahrungen und insbesondere das von Wolf entwickelte neue Verfahren werden gewiß für künftige Arbeiten ähnlicher Art von sehr wesentlicher, neue Wegeweisender Bedeutung sein.

Der Band 9 enthält zwei Abhandlungen, die sich auf die Zentrierung von und nach trigonometrischen Signalen gemessener Horizontalwinkel auf das unter dem Signal vermarkte Zentrum beziehen.

In der ersten Abhandlung von Wolf wird der Vorgang bei der Ablotungsmessung beschrieben und die Aufgabenstellung präzisiert. Der zur Bestimmung der Zentrierungselemente führende Rechnungsgang wird aufgezeigt, wobei die Lösung für zwei Fälle — ohne und mit Berücksichtigung überschüssiger Ablotestände — angegeben wird, und es wird eine Diskussion der Fehlerinflüsse durchgeführt. Es ergibt sich, daß größere, etwa 100–150 m überschreitende, Entfernungen der Ablotestände vom Signal tunlichst zu vermeiden sind, und daß es bei vorgegebenem Quantum der für die gesamte Ablotung anzusetzenden Arbeit vorteilhafter ist, bei geringerer Satzanzahl der Winkelmessungen die Anzahl der Ablotestände zu erhöhen, als in umgekehrter Weise zu verfahren.

Im zweiten Aufsatz beschäftigt sich Mulert mit dem (auch bei der Ausgleichung des ZEN häufig vorgekommenen) Fall, daß auf nicht koordinierte Punkte bezügliche Beobachtungen auf koordinierte Punkte zu reduzieren sind. Es werden Formeln und Tafeln zur Berechnung der Zentrierungsbeträge aus den betreffenden Gauß-Krüger-Koordinaten angegeben.

Dresden.

A. Buchholtz.

Hugo Sirk (o. Prof. a. d. Univ. Wien), Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker. 6. verbesserte Aufl., XII u. 302 S. m. 126 Abb. u. 1 Ausschlagtafel. Dresden u. Leipzig 1950. Th. Steinkopff. Preis 12,— DM.

Das Buch hat erhebliche Verbreitung gefunden; und es mag daher am Platze sein, es nochmals vom Standpunkt der Mathematik zu prüfen. Wir müssen uns dabei vor Augen halten, wozu der junge Chemiker die Mathematik braucht: Er muß soviel Mathematik verstehen, daß ihm die Grundtatsachen der Thermodynamik, der theoretischen Chemie und schließlich auch der Vorstellungen von Atomhülle und Atomkern im Laufe seiner Studienzeit überhaupt erschlossen werden können; wir sind der Überzeugung, daß es richtig wäre, die Chemiker heute frühzeitig, im ersten Studienjahr, mit Mathematik bekannt zu machen. Statt dessen sehen wir allenthalben Bücher erscheinen, die dem Chemiker das einfache Rüstzeug vorenthalten, oder in einer Form darbieten, welche mit Umstand und Ballast überladen ist, welche davor scheut die kleinen Hürden zu nehmen; lieber weichen sie aus in Sümpfe und Dornestrüpp und begünstigen so nur eine pseudowissenschaftliche Haltung. Man denke an die Entgleisungen bei Asmus (de Gruyter) und in ähnlichen Werken, die sogar mehrere unveränderte Auflagen gezeitigt haben. — Angesichts solcher Erscheinungen habe ich die Erstauflage von Sirk „zu den gelungenen Versuchen dieser Art“ gestellt. Das ist nicht ohne präzise Einwände geschehen. Die sechs Auflagen haben auf solche Einwände keine Rücksicht genommen: Immer noch wird der absolute

Betrag vermieden und schon dadurch eine schleppende, stellenweise unexakte Darstellung herbeigeführt. Die Kunst, umständliche Formeln zu drucken, ist gerade dort besonders verbreitet, wo die Kunst fehlt, auch nur einfache Formeln zu lesen. Diese Erscheinung teilt das Sirk'sche Buch mit anderen „einfachen“ Einführungen in die Mathematik für Nicht-Mathematiker. Wir nennen nur zwei Lesebeispiele: S. 155/56, wo erst die Differentiation von e^{-x} verderbt dargestellt ist (solcher Entstellungen der logischen Ordnung gibt es mehr), und dann die Formel

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{x} \sim \frac{x}{3}$$

mit typischem Mißbrauch anfänglicher Formelschreiberei entwickelt ist: x^4 und x^6 werden mitgeschleppt um x^1 zu erhalten. S. 158 wird die Reihenentwicklung für $\log(a + \xi)$ mit so umfänglichen Formeln gewonnen, daß kein junger Chemiker die Geduld haben dürfte durchzuhalten. — Immer noch scheuen die Chemischen Rennpferde vor der Hürde des Grenzprozesses, dessen „Erwähnung in der täglichen Praxis zu umständlich“ wäre (S. 24): darum verwende man den Begriff des Unendlich kleinen. In der Volkskunde kennt man die Erscheinung des „gesunkenen Kulturguts“ (Hans Naumann): Was kulturell schöpferische Schichten geschaffen, das breitet sich langsam, unter sinkender Intensität in breitere, nachahmende Schichten aus. Es scheint uns, daß die Chemiker-Mathematik ein besonders eindrucksvolles Beispiel ist. Hoffen wir, daß der einheitliche, und nach vielen Seiten schmiegsame Grenzbegriff innerhalb der nächsten 50 Jahre dorthin einsinkt. — Es kann nicht unsere Aufgabe sein, die vielen kleinen und größeren Mängel der Darstellung aufzuzählen. Nach 6 Auflagen können wir das Buch zwar noch als besser als manche andre — doch darum keineswegs als gut ansehen. Es ist so wie es ist: irreparabel.

Gießen.

Egon Ullrich.

Dr. G. Hamel (em. o. Prof. a. d. Techn. Univ. Berlin), Theoretische Mechanik. Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band LVII.) XVI + 796 S. mit 161 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Preis brosch. 63,— DM, geb. 66,— DM.

Der Verf., langjähriger Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule Charlottenburg, der jetzigen Technischen Universität, und einer der führenden Vertreter der theoretischen Mechanik in Deutschland gibt nunmehr den Hauptinhalt seiner Vorlesungen in Buchform heraus.

Die Bezeichnung theoretische Mechanik anstelle der üblichen Bezeichnung „analytische Mechanik“ wurde gewählt, um den deduktiven Charakter der entwickelten Lösungsmethoden zu betonen und es zu vermeiden, daß etwa die Analysis, z. B. die Integrationstheorie der Differentialgleichungen, in den Vordergrund gerückt würde. Andererseits sollte der Buchtitel klar den Gegensatz zu den nicht-deduktiven, bzw. syntetischen und mehr anschaulichen Methoden herzustellen, welche auf dem Gebiete der technischen Mechanik meist Anwendung finden. Der Verf. hat sich mit Erfolg bemüht, die gesamte theoretische Mechanik in möglichst einheitlicher Darstellung erscheinen zu lassen, und zwar nicht getrennt in Punktmechanik und Mechanik der Kontinua, sondern eingeteilt nach Gesichtspunkten, die sich einerseits aus den Begriffsdefinitionen, andererseits aus der Art des Bewegungszustandes der betrachteten Systeme und der zugehörigen mathematischen Behandlung ergeben. Die einzelnen Kapitel tragen folgende Überschriften: Der Begriff der Kraft und das Newton'sche Grundgesetz; Statik gebundener Systeme

von endlichem Freiheitsgrad; Statik der Systeme von unendlich vielen Freiheitsgraden; die ersten allgemeinen Prinzipien der Kinetik; holonome Systeme mit endlichem Freiheitsgrad und die Lagrange'schen Gleichungen; mathematische Durcharbeitung; die Minimal-Prinzipien; der starre Körper im Raum; holonome Systeme von endlichem Freiheitsgrad; Aufgaben und Probleme der theoretischen Mechanik. Es war also notwendig, nicht die eigentliche Stoffeinteilung der Mechanik, die der Verf. in seiner Einteilung besonders herausstellt (Kinematik, Massenkinetik, Dynamik, Statik, Kinetik, Kinetostatik) für die Gliederung des Buches als maßgeblich zu verwenden; sondern es wurde durch die einheitliche Behandlung des Gesamtgebietes eine abweichende Aufteilung erforderlich, wobei gemäß dem Vorbild von Lagrange das Prinzip der virtuellen Arbeiten, das D'Alembert'sche Prinzip und das Lagrange'sche Prinzip der Befreiung konsequent durchgeführt wurden. Hierin unterscheidet sich das Buch wesentlich von dem Enzyklopädieartikel von Prange und der analytischen Dynamik von Whittaker, wenn sich auch der Verf. in seiner Darstellung zuweilen an diese beiden Standardwerke anlehnt. Um die gestellte Aufgabe erfüllen zu können, ohne das Buch umfangsmäßig in ein Handbuch ausarten zu lassen, mußte der Verf. sich auf das beschränken, was für ein Lehrbuch über die Gesamtmechanik als wesentlich anzusehen ist. Dennoch zeigt sich eine große Vielseitigkeit des Inhaltes; u. a. finden sich Minimal-Prinzipien von Castigliano, sowie die Theorie dünner Hälte, Schalen und Platten in den Abschnitten über Elastizitätstheorie, die Behandlung spezieller nicht-holonome Systeme von endlichem Freiheitsgrad, Bemerkungen zur Integrationstheorie der kanonischen Gleichungen, die Anwendung der Lagrange'schen Methoden in der Kontinuumsmechanik. Auch eine kurze elegante Darstellung des Gravitationsfeldes in der allgemeinen Relativitätstheorie wird gegeben. Vor allem enthält das Buch in seinem letzten Teil eine Sammlung interessanter Aufgaben und Probleme des Gesamtgebietes, welche absichtlich aus den vorangegangenen theoretischen Ableitungen herausgelöst und mit in das Schlußkapitel aufgenommen wurden, so z. B. die Untersuchungen über Reibung von Painlevé u. a., Behandlung des Mehrkörperproblems in einer erweiterten Formulierung der elementaren Lösung von Lagrange, Aufstellung der allgemeinen Kreiselbeziehungen mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen unter Verwendung komplexer Koordinaten, mathematische Probleme zur Trennung der Variablen. Das interessante Buch, das offenbar einen Teil der Lebensarbeit des bekannten Verf. darstellt, stellt sich somit nicht nur würdig an die Seite der beiden erwähnten Standardwerke, sondern liefert in mancherlei Hinsicht wertvolle Ergänzungen, die von der Fachwelt sicherlich begrüßt werden. Die Darstellung ist übersichtlich und trotz der mathematischen Strenge klar und verständlich. Im Gegensatz zu den Werken von Whittaker und Prange, welche fast ohne Abbildungen erschienen waren, enthält das Hamelsche Werk auch eine größere Anzahl erläuternder Skizzen, welche dem Leser das Verständnis erleichtern.

Dresden.

H. Neuber.

Lothar Heffter, Grundlagen u. analytischer Aufbau der Projektiven, Euklidischen, Nichteuklidischen Geometrie. 2. Aufl., 192 S. Leipzig 1950. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. 12,60 DM.

Das Buch ist im wesentlichen das dem dreibändigen Heffterschen „Lehrbuch der analytischen Geometrie“ eigentümlichen systematischen Aufbaues; es bringt darüber hinaus aber mancherlei Verbesserungen u. Zusätze, die sich weder im „Lehrbuch“ noch in

anderen Veröffentlichungen finden. Es vereinigt in sich in hervorragendem Maße alle Vorzüge zur Ermöglichung einer gründlichen Orientierung über die Probleme der modernen Geometrie auf kürzestem Wege. In knapper und klarer Form werden, stilistisch stets mit größter Eindringlichkeit, die Grundlagen für die Klassifizierung der Geometrien herausgearbeitet, so daß der Leser ein plastisches Bild von den Unterschieden und inneren Zusammenhängen gewinnt.

An die Darstellung der Grundlagen der Geometrie, in der alle Textstellen, die sich auf den Anschauungsraum beziehen, für den axiomatischen Weg also nicht benötigt werden, auch äußerlich durch anderen Druck kenntlich gemacht werden, schließt sich die Behandlung der Parallel- und Orthogonalgeometrie an. Im letzten Abschnitt wird, ebenfalls von der projektiven Geometrie aus, die Cayley-Kleinsche Geometrie entwickelt.

Wollte die Besprechung Einzelheiten des reichen Inhaltes herausheben, so müßte sie bei der Gleichwertigkeit fast auf alles eingehen. Das ist unmöglich. Darum sei mit einer warmen Empfehlung des Werkes geschlossen.

Dresden.

Draeger.

Otto Lorenz, Der Ingenieurberuf, Voraussetzung — Ausbildung — Laufbahnen. VI + 153 S. m. 4 Abb. Düsseldorf 1950. Deutscher Ingenieur-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 4,80 DM für VDI Mitglieder 4,30 DM.

Die vorliegende Schrift gibt einen guten Überblick über die verschiedenen Arten des Ingenieur-Berufes für solche Kreise, die der Technik an sich fern stehen. Wer über die eigentliche Problematik des Studiums unterrichtet sein will, wird nicht befriedigt sein; ebenso sind die Angaben über die derzeitigen Einrichtungen in der Ostzone unvollständig.

Dresden.

Heidebroek.

Dr. phil. V. Happach, Ausgleichsrechnung. Ein Lehrbuch der Fehlerausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate in Wissenschaft und Technik. (Teubners Mathematische Leitfäden Bd. 18) 2. Aufl., 104 S. m. 26 Abb. Leipzig 1950. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis kart. 6,20 DM.

Das vorliegende Buch gibt die für die einzelnen Rechnungsgänge nötigen Formeln und Verfahren im allgemeinen ohne grundlegende Ableitungen. Es legt das Hauptgewicht auf die Erläuterung ihrer Anwendung an zahlreichen aus verschiedenen Gebieten, insbesondere aus der geodätischen Vermessungstechnik entnommenen Beispielen, und gibt so eine gute Einführung in die Technik der Ausgleichsrechnung.

Dresden.

Willers.

Bodo von Borries, Die Übermikroskopie. Einführung, Untersuchung ihrer Grenzen und Abriß ihrer Ergebnisse. 416 Seiten mit 225 Abbildungen. Berlin 1949. Verlag Dr. Werner Saenger. Preis geb. 48,- DM.

Der Verfasser des vorliegenden Werkes, bekannt durch seine Entwicklungsarbeiten am Übermikroskop, will nach dem Untertitel seines Buches eine Einführung, die Untersuchung der Grenzen und die Ergebnisse der Übermikroskopie bringen. Diese Stichworte geben auch die Hauptteile des Buches an. Die Einführung behandelt im wesentlichen ohne rechnerische Beweise die Grundlagen der Elektronenoptik, sie erläutert das Prinzip des Übermikroskops und die technische Ausführung und behandelt zugleich die verschiedenen Sonderverfahren der Objektpräparation. Besonderer Wert ist hierbei auf eine ausführliche Darstellung der geschichtlichen Entwicklung gelegt. In dem Abschnitt über die Grenzen der Übermikroskopie werden vor allen Dingen diejenigen Eigenschaften der Elektronenlinsen besprochen, die das Leistungsvermögen bestimmen, nämlich:

Bildfehler und Beugung, sowie technische Unvollkommenheiten der Linsen. Ferner sind diejenigen Leistungsgrenzen behandelt, die aus der Wechselwirkung zwischen Elektronenstrahlen und Objekt entstehen: die beschränkte Dicke der als durchstrahlt erscheinenden Objekte; die untere Grenze des kleinsten mit hinreichendem Kontrast abgebildeten Details, die durch Ionisierung oder Erwärmung des Objekts bestimmt ist. Der letzte Hauptteil schließlich enthält Ergebnisse aus Chemie und Technik, sowie aus Biologie und Medizin mit zahlreichen Abbildungen.

Als leichtverständliche Darstellung wird das Buch allen denen willkommen sein, die mit dem Übermikroskop arbeiten müssen und sich in die Theorie des Gerätes nicht im einzelnen einarbeiten können. Der zweite Hauptteil über die Grenzen der Übermikroskopie mit seiner ausführlichen Wiedergabe der Arbeiten des Verfassers wird auch denen viel zu bieten haben, die sich für die konstruktive Ausgestaltung des Gerätes interessieren. Tabellen wie auf Seite 240 bis 241 oder die Abbildung auf Seite 369 könnten nach Meinung des Referenten fortbleiben, ohne daß der Wert des Buches beeinträchtigt würde. Im Ganzen darf aber die Arbeit als gut gelungen bezeichnet werden.

Dresden.

Recknagel.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten)

C. Zwikker (Technical Director Light Division Philips, Eindhoven), *Advanced Plane Geometry* VII + 299 S. mit 273 Abb. Amsterdam 1950. North-Holland Publishing Company.

Dr.-Ing. Franz Ollendorff (Professor am Hebrew Technical College, Haifa). *Die Welt der Vektoren. Einführung in Theorie und Anwendung der Vektoren, Tensoren und Operatoren.* VIII + 470 S. mit 68 Abb. Wien 1950. Springer-Verlag. Preis: 37,50 DM., geb. 40,— DM.

Dr. phil. Ad. Duschek (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien) und **Dr. techn. A. Hochrainer**. *Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Teil II: Tensoranalysis.* VII + 338 S. mit 64 Abb. Wien 1950. Springer-Verlag. Preis: 24,80 DM.

Technische Bücher 1945 bis März 1950. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag.

F. Strecker, *Praktische Stabilitätsprüfung mittels Ortskurven und numerischer Verfahren.* XI + 189 S. mit 101 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis brosch. 15,— DM., geb. 18,— DM.

Herbert Beckert. *Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise für das Differenzenverfahren zur Lösung des*

B. Eck, *Technische Strömungslehre. Dritte, verbesserte und erweiterte Auflage.* X + 398 Seiten mit 372 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Ladenpreis: 24,— DM., Ganzleinen 27,— DM.

Das Buch von Eck hat das Ziel, in einer dem Ingenieur leicht zugänglichen Form diejenigen Lehren und Versuchsergebnisse der modernen Strömungsforschung darzustellen, die für die Praxis wichtig erscheinen. Die jetzige dritte Auflage des beifällig aufgenommenen Werkes enthält wesentliche Erweiterungen, so Ausführungen über die Aerodynamik der Verbrennung, über die Bewegung von Schwebeteilchen, die z. B. für die pneumatische Förderung und die Entstaubungstechnik wichtig ist, und manches andere mehr. Die steten Bemühungen des Verfassers, in seinem Buche mit den Fortschritten der Strömungswissenschaft Schritt zu halten, sind sehr anzuerkennen. Die Sichtung und Verarbeitung der in der umfangreichen Originalliteratur verstreuten neueren Ergebnisse und ihre eingängige Darstellung ist eine bedeutende Leistung, für die der in der Praxis stehende Ingenieur dem Verfasser Dank wissen wird.

Göttingen.

W. Tollmien.

Anfangwertprobleme, des gemischten Anfangs-, Randwert- und des charakteristischen Problems einer hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. (Bericht über die Verhandlungen der Sächs. Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-naturwissenschaftl. Klasse, Bd. 97, Heft 4. 42 S. mit 9 Abb. Berlin: Akademie-Verlag 1950. Preis: 9,— DM.

Mathematisch-Physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität. Herausgeg. von H. Behnke und W. Lietzmann in Verbindung mit dem mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach. Bd. 1, 318 S. Göttingen 1949/1950. Vandenhoeck & Ruprecht. Preis: 19,60 DM. (Subskriptionspreis 17,— DM.)

Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung.

Unter Mitwirkung von L. Prandtl, W. Tollmien, G. Vogelpohl herausgegeben von A. Betz. Göttingen 1950. Selbstverlag Max-Planck-Institut für Strömungsforschung.

Heft 1: **J. Rotta**, *Über die Theorie der turbulenten Grenzschicht.* 54 S. mit 10 Abb. Preis: 4,— DM.

Heft 2: **H. Himmelskamp**, *Profiluntersuchungen an einem umlaufenden Propeller.* 38 S. mit 59 Abb. Preis: 8,— DM.

NACHRICHTEN

Ansprache von Prof. Sommerfeld an den internationalen Mathematiker-Kongreß in Cambridge Mass.

Die Ansprache wurde in der ersten Sitzung der Sektion für angewandte Mathematik von Herrn J. von Neumann in engl. Übersetzung verlesen.

Meine Damen und Herren!

Ich bin sehr traurig, daß ich heute nicht unter Ihnen sein und persönlich zu Ihnen sprechen kann, wie mir das ehrenvollerweise von der Leitung dieses

Kongresses vorgeschlagen war. Ich bin dreimal in Ihrem Lande gewesen, 1922/23 als Carl-Schurz-Professor in Madison Wis, 1929 als Gastprofessor in Pasadena, 1931 bei der Sommersession in Ann. Arbor. und habe mich jedesmal unter meinen vielen amerikanischen Freunden und Schülern herzlich wohl gefühlt.

Ich hätte auch gern persönlich Zeugnis abgelegt für meine Stellung zur angewandten Mathematik. Die Zeiten sind längst vorüber, in Ihrem Lande wie

in meinem, wo ein bedeutender englischer Mathematiker sagte: Gott bewahre die Mathematik vor ihren Anwendungen! Wir wissen alle, daß die abstrakte Mathematik ihre eigenen Wege gehen muß, ohne Rücksicht auf mögliche Anwendungen, die oft lange auf sich warten lassen. Wir wissen aber auch, mit welcher Liebe sich die größten Mathematiker, Gauss, Riemann, Cauchy, Poincaré den Anwendungen gewidmet haben.

Als Planck kurz vor meiner letzten Reise nach Amerika mir die Planck-Medaille überreichte, apostrophierte er mich, sich gewissermaßen entschuldigend, als angewandten Mathematiker. Ich antwortete ihm, daß ich diese Benennung gern akzeptiere und daß ich nicht so denke, wie mein Kollege Alfred Pringsheim, der Weierstrass-Schüler, der einmal bei einem studentischen Feste sagte: Sie wissen, daß ich immer einen gewandten Mathematiker mehr geschätzt habe als einen angewandten Mathematiker. Hoffentlich konnten Sie die Antithese gewandt, angewandt, ungewandt, die ganz im Sinne des witzigen Pringsheim lag, auch in der Übersetzung verstehen. Planck gegenüber betonte ich, mein Streben sei immer gewesen, zugleich ein gewandter und angewandter Mathematiker zu sein.

Mein Freund Constantin Carathéodory, mit dem ich gehofft hatte gemeinsam zu diesem Kongreß zu reisen, war in den abstrakten Regionen der Mengenlehre zu Hause und gleichzeitig erfolgreich in der Thermodynamik, der geometrischen Optik und der allgemeinen Mechanik. Wir alle bedauern tief seinen plötzlichen Tod. Er wäre eine Zierde beider Sektionen dieses Kongresses, der reinen und der angewandten, gewesen.

Für den umfassenden Geist Einsteins ist Mathematik, Physik, Kosmologie und Philosophie eine Einheit. Auch sonst beschränkt sich in Ihrem Lande die angewandte Mathematik nicht wie früher auf das Gebiet des numerischen Rechnens, der Astronomie und Geodäsie. Sie richtet sich auf die Ordnung aller physikalischen Erscheinungen und technischen Erfahrungen, ja sie wagt es mathematische Methoden in die Psychologie und die Technik des Denkens zu übertragen.

Mein Wunsch ist, daß dieser Kongreß für die Mathematik im weitesten und breitesten Sinne fruchtbar sein möge.

Internationaler Mathematikerkongreß

In der Zeit vom 30. August bis 6. September 1950 fand an der Harvard-Universität in Cambridge, Massachusetts USA, ein Internationaler Mathematikerkongreß statt, der von über 2000 Personen besucht war. Es wurden über 500 Vorträge gehalten, darunter einige zusammenfassende Vorträge von zwanzig bis sechzig Minuten Dauer, alle anderen Vorträge waren Kurzvorträge von zehn Minuten Dauer. Die Vorträge wurden in parallel verlaufenden Sektionen abgehalten; es waren 7 Sektionen aufgestellt: I. Algebra und Zahlentheorie, II. Analysis, III. Geometrie und Topologie, IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, V. Mathematische Physik und angewandte Mathematik, VI. Logik und Philosophie, VII. Geschichte der Mathematik und Erziehung. Hier seien von den Vorträgen nur die zusammenfassenden Vorträge in der Sektion V genannt. Sie wurden gehalten von C. D. Darwin (Refractive Index ionisierter Gase), F. Rellich (Störungstheorie der Spektralzerlegung), J. v. Neumann (Shock Interaction), R. Courant (Randwertaufgaben der modernen Hydrodynamik), S. Gold-

stine (Aus der Gasdynamik), W. Heisenberg (Stabilitätsfragen der Flüssigkeitsdynamik), W. Prager (Randwertprobleme der Plastizität), J. J. Stoker (Wasserwellen), H. Lewy (Analytische Randbedingungen). Neben den Vorträgen fanden Besichtigungen der Institute statt, so konnte man z. B. im MIT (Massachusetts Institute of Technology) einen Differential Analyser, ein Zyklotron usw. und im Computation Laboratory einen I. B. M. Automatic Sequence Controlled Calculator sehen.

Hannover.

L. Collatz.

Sektion für Kristallkunde der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft

Auf der diesjährigen Hauptversammlung der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft, die Ende August in Göttingen stattfand, wurde auf Anregung einer Reihe interessierter Wissenschaftler eine „Sektion für Kristallkunde“ eingerichtet und diese Sektion sinngemäß in den Satzungen der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft verankert. Zum Leiter der Sektion, der gleichzeitig einer der beiden stellvertretenden Vorsitzenden der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft ist, wurde Professor Dr. H. O'Daniel, Universität Frankfurt, gewählt.

Die Gesellschaft wünscht, in der „Sektion für Kristallkunde“ auch diejenigen Fachrichtungen zu pflegen, die — über den Rahmen speziell mineralogischer Fragestellungen hinausgehend — sich mit dem Aufbau und den Eigenschaften des festen (kristallisierten) Körpers befassen. Die Gesellschaft hofft, auf diesem Wege einen engen Kontakt mit den Nachbardisziplinen der Mathematik, der Physik und der Chemie herzustellen. Eine jährliche Vortragsstagung soll vorzüglich hierzu dienen.

GaMM-Tagung

Die wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik findet in der Zeit vom 28. bis 31. März 1951 in Freiburg i. Br. statt. Anmeldungen zur Teilnahme sowie Anmeldungen von Vorträgen (mit kurzer Inhaltsangabe bis zu 15 Zeilen) sind an den örtlichen Tagungsleiter, Prof. Dr. Görtler (17b) Freiburg i. Br., Stadtstr. 57 zu richten, und zwar beides bis spätestens 28. Februar 1951. Als normale Vortragsdauer sind 10 bis 15 Minuten vorgesehen. Die Vorträge finden im Hauptgebäude der Universität statt.

Zürich. Im Juli 1950 wurde am Institut für angewandte Mathematik der ETH, Zürich eine von der Zuse KG in Neukirch (Kreis Hünfeld) gebaute programmgesteuerte Relais-Rechenmaschine „Modell Z4“ in Betrieb genommen. Das elektro-mechanisch arbeitende Gerät hat 2200 Telefon-Relais und 21 Schrittschalter. Die Speicherung der Zwischenresultate (bis zu 64 Zahlen) erfolgt in einem mechanisch arbeitenden Speicherwerk. Die Rechnung erfolgt im Dualsystem mit gleitendem Komma. Die Daten werden mittels Tasten oder Lochkarten in Dezimalschreibweise eingegeben, die Resultate ebenfalls im Dezimalsystem gelocht oder gedruckt. Die Übertragung aus oder in die Dualschreibweise erfolgt automatisch. Zur Programmierung dient ein besonderes Planfertigungsgerät.

Braunschweig. Anlässlich seines 65. Geburtstages wurde Prof. Dr. Constantin Weber von der Techn. Hochschule Braunschweig die Würde eines Dr.-Ing. e. h. verliehen.